

Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht¹

Heinrich Winter, RWTH Aachen, Fakultät Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften

Seit es Mathematik und vor allem Mathematikunterricht gibt, gibt es auch die Erwartung, dass durch die Beschäftigung mit Mathematik eine irgendwie geartete prägende (positive) Wirkung auf den Geist im Ganzen ausgeübt werde. So soll nach PLATON (Staat) „die Seele zur Wahrheit“ erhoben werden; nach PESTALOZZI ist „Zählen und Messen der Grund aller Ordnung im Kopf“ (Lienhard und Gertrud); und NIETZSCHE meint, dass die Mathematik „das Mittel der allgemeinen und letzten Menschenkenntnis“ sei (Fröhliche Wissenschaft). Man könnte die Liste fortsetzen, übrigens auch mit gegenteiligen Meinungsäußerungen.

Ein Blick in alte und neue Lehrpläne lehrt, wie weitreichend der Beitrag des Mathematikunterrichts für die Allgemeinbildung in der Regel eingeschätzt wurde und wird. Danach sollen durch den Mathematikunterricht solche allgemeinen Fähigkeiten (Tugenden, Qualifikationen, Haltungen, ...) wie „abstraktes Denken“, „logisches Denken“, „schöpferisches Denken“, „phantasievolles Denken“, „kritisches Denken“, „Sprachfähigkeit“, „Konzentrationsfähigkeit“, „Ehrfurcht“, „Bescheidenheit“ u.v.a. mehr (zuweilen auch „Sparsamkeit“, „Vaterlandsliebe“) gefördert werden (vgl. LENNÉ 1969).

Eine erste Frage ist:

Brauchen wir die Ausformulierung solcher allgemeinen Lernziele (Lehrziele, Bildungsziele, generelle Intentionen) und wenn ja, wozu?

Mit einiger Vergröberung kann man heute bei uns unter den Betroffenen (Mathematikern, Fachdidaktikern, Lehrern, allgemeinen Pädagogen, etc.) gegenüber der Problematik allgemeiner Lernziele u.a. etwa *folgende* Positionen ausmachen:

- *Negation*: Es gibt keine nachweisbaren Auswirkungen des Mathematikunterrichts auf das gesamtgeistige Verhalten. Es werden lediglich (bestenfalls) partielle, fachbezogene Verhaltensänderungen erzielt, die sich als Fertigkeiten, Wissen, etc. abtesten lassen. Man kann sich dabei u.a. auch auf Georg Christoph Lichtenberg berufen, der in einem seiner Aphorismen behauptet, dass es unter den Mathematikern „die größten Plunderköpfe gibt, untauglich zu irgendeinem Geschäft, das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine als des Denkens sind“, was ja nicht sein dürfte, wenn die Mathematik eine disciplina mentis wäre. Wenn fähige Mathematiker auch auf anderen Gebieten hohe Leistungen erbringen, dann beweist das keineswegs, dass jene erst durch die Beschäftigung mit Mathematik ermöglicht würden. Es ist also unsinnig, sich mit allgemeinen Lernzielen zu befassen.
- *Skepsis*: Möglicherweise gibt es prägende Einflüsse, aber sie sind kaum nachweisbar. Man jagt also Chimären nach und opfert dabei u. U. mathematische Substanz; mathematische Leistungen erfahren dadurch einen sanktionierten Niedergang. Man soll sich gefälligst bescheiden und den Schülerinnen und Schülern zunächst einmal „Wissen und Fertigkeiten beibringen“ (vgl. TIETZ 1974).
- *Naivität*: Mathematikunterricht entwickelt (sozusagen automatisch) allein durch das Eindringen in die erhabene, strenge Architektur „des Stoffes“ die oben angedeuteten Qualifikationen. Die Schülerinnen und Schüler lernen z.B., wie man Sätze beweist, und also werden sie in allen einschlägigen Lebenssituationen sich durch eine besondere Schärfe in der Argumentation auszeichnen. Oder: Die Schülerinnen und Schüler lernen im Analysisunterricht Paradoxien kennen und werden dadurch gegenüber Anfechtungen der Wahrnehmung, der Anschauung und des sogenannten gesunden Menschenverstandes stärker gefeit (vgl. dazu MESCHKOWSKI 1965).
- *Inhaltslosigkeit*: Die Inhalte des Mathematikunterrichts dienen immer nur dazu, gewisse sehr allgemeine pädagogisch-politische Zielsetzungen — wie Emanzipation, Konfliktlösungsfähigkeit, Entscheidungsfähigkeit — anzustreben. Die Inhalte sind daher einerseits insoweit auswechselbar, als es nur darauf ankommt, solche auszuwählen, die etwas im Sinne der Ideologie herzugeben versprechen. Andererseits werden solche bevorzugt, die für soziale und politische Fragestellungen instrumentativen Charakter haben. Im Extrem: Falls sich

nicht belegen lässt, dass der Mathematikunterricht einen Beitrag für die Heranbildung des „neuen Menschen“ leisten kann, muss er eben abgeschafft werden.

Ich glaube, dass man letztlich keine der vier Positionen vertreten kann, auch wenn die beiden ersten so wohlthuend nüchtern klingen und für die dritte die gesamte Bildungsgeschichte zu sprechen scheint. Die vierte Position ist schon wegen der Ausklammerung der Eigengesetzlichkeiten der Inhalte indiskutabel.

Meine These ist:

Wir brauchen eine Artikulation von allgemeinen Lernzielen, denn wir brauchen möglichst überzeugende Antworten auf die folgenden engstens zusammenhängenden Fragen:

Was soll in welcher Anordnung und Detaillierung gelernt werden?

Wie soll gelernt werden?

Dabei gebe ich mich nicht der Illusion hin, dass ein so hoher Präzisierungsgrad erreicht werden könnte, der es gestattete, nach der Art eines Algorithmus aus dem Angebot an Inhalten und Methoden das „Richtige“ herauszufiltern. Man darf hier also nicht endgültige Weisheiten oder eine Art Axiomensystem des Mathematiklernens erwarten und natürlich gehen subjektive Einschätzungen stark mit ein, sollen jedoch möglichst transparent gemacht werden. Immerhin können die Lernziele, die unten vorgeschlagen werden, zumindest eine eingrenzende Funktion bezüglich der Beantwortung der oben genannten Fragen haben.

Ein weitere Frage ist:

Wie kann man allgemeine Lernziele gewinnen?

Sicher nicht dadurch, dass man die jeweils vorherrschende Strömung der allgemeinen Pädagogik daraufhin abklopft und dann auf den Mathematikunterricht hin zu spezialisieren trachtet. Man kann nicht stricken ohne Wolle, d.h. die Eigenart des „Stoffes“ Mathematik muss fundamental zum Zuge kommen. Sicher aber auch nicht dadurch, dass man die Ordinarien für Mathematik befragt und allein entscheiden lässt, denn Lernziele betreffen ja den Lernenden in seiner jetzigen und künftigen Existenz.

Lernziele können nicht ohne ein Bild von der Mathematik und auch nicht ohne ein Bild vom Menschen bestimmt werden. Bei der Lernzielfindung muss das gesamte pädagogische Feld des Lernens von Mathematik beachtet werden.

Mein Ansatzpunkt ist die Frage: Welches sind die mathematischen Grundtätigkeiten, die sich aus der „normalen“, alltäglichen, allgemeinen Denkpraxis heraus fortstilisiert haben und demgemäß bei ihrer Entwicklung noch am stärksten allgemeine (vor allem) kognitive Anlagen und Fähigkeiten mit beeinflussen könnten?

Es ist klar, dass man diese Frage nicht durch Betrachten der fertigen Mathematik, sondern nur durch Beobachten von wirklichen Lernvorgängen (Mathematik in der Entstehung!) zu beantworten versuchen kann (vgl. FREUDENTHAL 1974; WINTER 1972; WITTMANN 1974).

Die folgende Aufzählung allgemeiner Lernziele stellt somit eigentlich „nur“ den Versuch dar, die vielfältigen Aktivitäten beim wirklichen Lernen von Mathematik zu bündeln und ihre genetischen Wurzeln freizulegen. Es sei betont, dass dies natürlich keine disjunkten Bündel sind und dass von dem erwähnten Ansatz her nicht auf der „Höhe“ (?) der derzeitigen Curriculum-Theorie diskutiert werden kann.

(L1) Der Unterricht soll dem Schüler/der Schülerin Möglichkeiten geben, schöpferisch tätig zu sein.

Das klingt zunächst ebenso anspruchsvoll wie unrealistisch wie vage (wie auch althergebracht). In Wirklichkeit kann man sich aber keine (ernsthafte) Lernsituation vorstellen, in der nicht mindestens ein Körnchen Kreativität *notwendig* ist. Ob es sich um das Lernen eines Begriffes, eines Verfahrens, eines Satzes, eines Beweises, einer Folgerung oder Anwendung oder Ausdeutung eines Satzes oder um das Lösen einer „Bestimmungsaufgabe“ handelt, und das sind doch typische Lernsituationen, immer bedarf es einer aktiven Auseinandersetzung des Lernenden mit dem Inhalt, an der auf vielfältige Weise ein ganzes Bündel kognitiver und affektiver Funktionen beteiligt ist: Beobachten; bewusstes Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, Symmetrien, Gestalten, Invarianten in einem Vielerlei von Erscheinungen; Konstruieren (Herstellen) von Figuren oder Situationen; Schematisieren einer

komplexen Situation; Klassifizieren; Anordnen; Aufsuchen von Entsprechungen (Analogisieren); Verallgemeinern; Spezialisieren; Umstrukturieren; Entwerfen und Verwerfen; Vermuten und Prüfen; Formulieren und Umformulieren; Variieren; Bedenken von Alternativen; Zerlegen und Zusammensetzen; Kombinieren und Trennen.

Diese und evtl. weitere Aktivitäten sind hier zwar nicht präzisiert (es ist fraglich, ob sie überhaupt in einem strengeren Sinne präzisierbar sind), aber ohne sie ist Begegnung mit Mathematik überhaupt nicht denkbar, wirkliche Mathematik nicht lernbar.

Jeder schöpferische Mathematiker bestätigt, dass diese heuristischen, von *Intuition* getragenen Aktivitäten fundamental sind. „Die Intuition, jene schwer zu fassende vitale Triebkraft, ist in der kreativen Mathematik stets vorhanden und sie motiviert und leitet selbst die abstraktesten Denkvorgänge“ (COURANT 1974, S. 195).

Dieses schöpferische Moment ist aber nicht nur ein wesentliches Merkmal speziell des mathematischen Denkens, sondern ebenso ein Charakteristikum der geistigen Existenz des Menschen überhaupt. Der Mensch ist im Gegensatz zum Tier nicht (nur) an den „Pflock des Augenblicks“ gebunden, um Bedürfnisse zu befriedigen, wobei angeborene oder erworbene Mechanismen agieren, sondern trägt Anlagen in sich, die Zwänge des Augenblicks zu überschreiten, indem er Bilder der Wirklichkeit entwirft, diese dabei übersteigt, und in Sprache, Kunst, Wissenschaft, Philosophie, Religion neue Wirklichkeiten erschafft, sein Dasein dadurch bereichert. Wesentlich ist dabei ein spielerisches Moment in dem Sinne, dass seine produktiven Aktivitäten nicht an der Elle direkter Nutzenanwendung gemessen werden müssen, vielmehr Spielraum ausfüllen, Freiheit realisieren. Dass seine Produkte praktisch genutzt werden *können*, ändert nichts an der grundlegenden Motivierung des *Herstellenwollens*. Die Anlagen zum Schöpferischen können verschüttet oder gefördert werden, können verdorren oder wachsen.

Für die Gestaltung des Unterrichts ergeben sich einschneidende Konsequenzen: Auswahl problemhaltiger Ausgangssituationen (tragfähige Einstiege); Angebot von fruchtbarem „Lernmaterial“ (konkretes Material zum Hantieren, Veranschaulichen, Lernspiele, sinnbezogene Symbolik, ...); mündlicher Unterrichtsstil („Was fällt auf?“ „Wie könnte man auch?“ „Wo gibt es etwas Ähnliches?“ „Wie kann man vereinfachen?“ „Wie kann man verallgemeinern?“ „Gibt es Sonderfälle?“ ...); Betonen konstruktiver Prozesse; *behutsame* Sprachdisziplinierung (kein Terminologieterror); vor allem: Bewusstmachen heuristischer Vorgehensweisen.

Trivial ist, dass sich ein solcher heuristischer Unterricht je nach Lernstufe auf verschiedenen Niveaus abspielen muss. Insbesondere kann dieselbe Begriffsbildung auf einer Stufe Gegenstand einer Entdeckung (Findung, Konstruktion), auf einer höheren Stufe Instrument für weitere Begriffsbildungen sein.

Zerstört ein solcher Unterricht nicht die innere Systematik der Inhalte und führt er nicht zu einer Verwöhnung der Schülerinnen und Schüler, indem ihnen ein lustvoller Königsweg vorgegaukelt wird, wo doch Lernen von Mathematik Schweiß und Mühe erfordert? Das würde er wahrscheinlich tun, wenn hauptsächlich Rosinen herausgepickt und zusammenhanglos mathematische Mußestunden aneinandergereiht würden. Das ist aber gerade nicht intendiert. Einige Beispiele mögen das verdeutlichen.

(i) *Einige Übungsformen zum „kleinen Einmaleins“ (Primarstufe)*

Welche rechteckigen „Parketts“ kann man mit 24 (25, 30, 37, ...) Kacheln legen? Bei welchen Zahlen gibt es nur einen Streifen, bei welchen sogar Quadrate?

Ist 87 eine Primzahl? Suche alle Primzahlen zwischen 80 und 100.

- Sortiere die Zahlen von 50 bis 80 richtig in das Vierfelderdiagramm ein. (Siebener-Zahlen sind die durch 7 teilbaren, Dreier-Zahlen durch die 3 teilbaren Zahlen.)

	Siebener-Zahlen	
Dreier-Zahlen		

- Welche Zahlen bis 100 haben genau 8 Teiler? Wie kann man die schnell finden?
- Eine Scheibe, bei der auf der Vorderseite + 7, auf der Rückseite - 6 steht, wird mehrfach geworfen. Starte bei 60 und addiere nach jedem Wurf der Scheibe 7 bzw. subtrahiere 6. Wo kannst du nach 1, 2, 3, ... Würfeln sein? Kannst du auf 100 gelangen? Wie?
- Was kannst du am Sieb des ERATOSTHENES finden?
- usw.

Auch für einen extremen Skeptiker dürfte klar sein: Hier wird auch die Rechenfertigkeit geübt, aber eben viel mehr als das.

(ii) Entdeckung des Satzes von EUKLID-PYTHAGORAS (Sekundarstufe I)

Ausgangsproblem (das einschlägige Problem der griechischen Mathematik!): Wie kann man ein gegebenes Rechteck mit den Seiten c und d in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat verwandeln?

Welche Abbildungen könnten bei der Lösung helfen?

- Folge dem „Scherungsfilm“ (vgl. Abb. 1) und beobachte, was dabei geschieht:

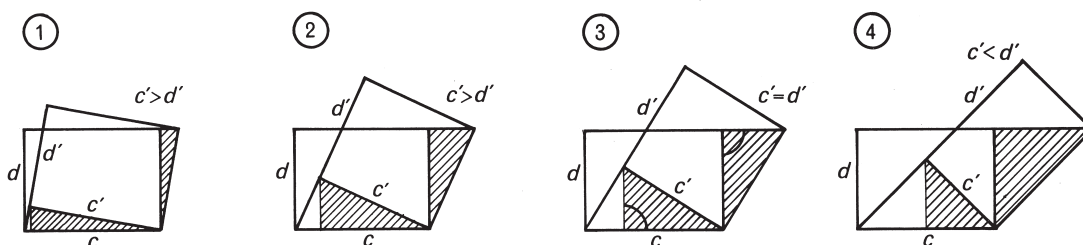


Abb. 1

- Was ist das Besondere im Fall ③? Vergleiche die beiden schraffierten Dreiecke!
- Wie kann man also unser Problem konstruktiv (und ohne zu probieren) lösen?
- Unter anderem wird hier eines deutlich: Entdeckungen vollziehen sich nicht auf einer Tabula rasa. Sie bedingen stets Vorwissen und bereits vorhandene Fertigkeiten, hier z.B. Sätze über Scherungen. Durch einen heuristischen Unterricht wird aber gerade Vorwissen aktiviert, direkt benutzt, bleibt also nicht in einer Speicherschublade liegen. Damit wird es aber auch wiederholt, vertieft und assimiliert.

(iii) Entdeckung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Sekundarstufe II)

Ein Zug fährt in t Stunden eine Gesamtstrecke der Länge s km.

(vgl. dazu das Zeit-Weg-Schaubild, Abb. 2).

Gibt es wenigstens einen Zeitpunkt t_m , in dem die Momentangeschwindigkeit gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit $\frac{s}{t}$ ist?

Wie kann man die Frage ins Geometrische übersetzen?

- Kannst du entsprechende Fragen zu Zeit-Preis-Funktionen, zu Produktionsmenge-Kosten-Funktionen stellen?
- Wie kannst du die Frage auf beliebige reell-wertige Funktionen auf einem reellen Intervall verallgemeinern?
- Welche Voraussetzungen garantieren die Existenz eines $x_m \in]a, b[$ mit $f'(x_m) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$? Beachte dazu z. B. Abbildung 3.
- Welche besondere Beachtung müssen wir den Intervall-Enden schenken?
- Kannst du jetzt einen Satz (als Vermutung) formulieren?

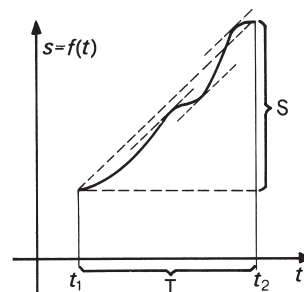


Abb. 2

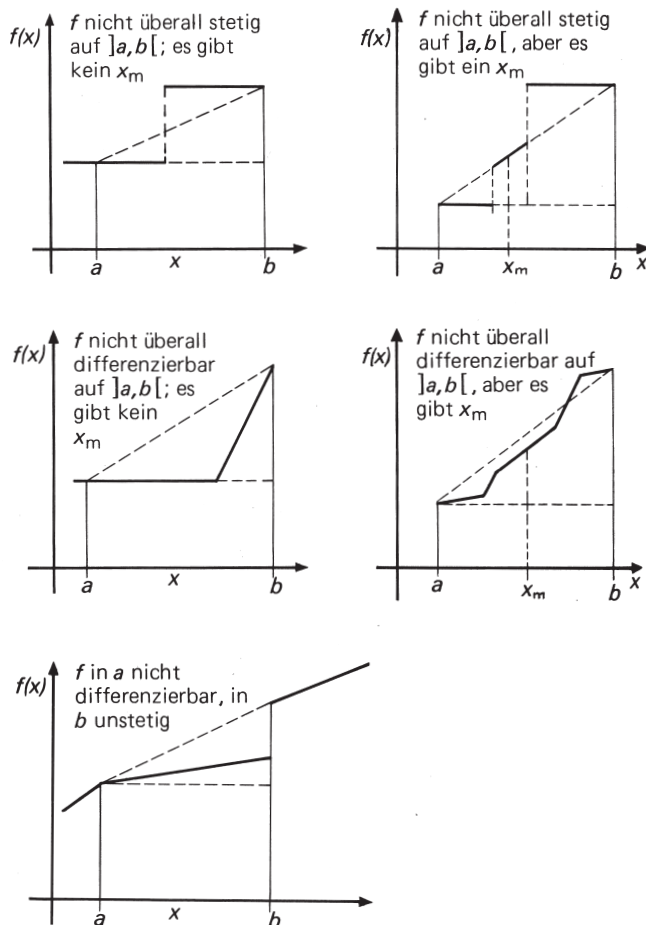


Abb. 3

Seltsamerweise spielt der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung in der Schulmathematik bisher eine Rolle, die seiner eminenten Bedeutung kaum entspricht.

Diese Beispiele mögen genügend verdeutlicht haben, wie hier kreativitätsorientierter Unterricht gemeint ist. Was die *Lerninhalte* angeht, so impliziert unser erstes allgemeines Lernziel ziemlich stringent: Es können nur solche Inhalte infrage kommen, die von hoher mathematischer Substanz sind, d.h. reich an Aspekten, Zugängen und Deutungen und reich an innerem Gehalt, kurz: multipel strukturiert. Speziell heißt das m. E.: Es führt in der *Sekundarstufe I* kein Weg an der klassischen (euklidischen) Geometrie vorbei, gerade weil und nicht *obwohl* sie hoch strukturiert ist und daher schier unbegrenzbare Möglichkeiten für heuristisches Arbeiten in sich trägt.

„Und unter allen ‚Spielen‘ ist die euklidische Geometrie mit ihren ständigen Bezügen zum intuitiv Gegebenen das am wenigsten Entbehrliche und Bedeutungsreichste“ (THOM 1974, S. 375). Ferner erscheint es nützlich, stärker als bisher kombinatorische Fragestellungen einzubeziehen.

Die „modernen“ Strukturbegriffe (Menge, Abbildung, Gruppe, ...) können fruchtbar gemacht werden für einen heuristischen Unterricht, denn eines der wichtigsten heuristischen Prinzipien besteht ja in der rückschauenden Distanzierung von Konkreta, und hierzu bieten sich die Strukturbegriffe als Instrumente in hervorragender Weise an. Allerdings ist gerade in dieser Hinsicht noch manches didaktisch zu klären.

(L2) Der Unterricht soll dem Schüler/der Schülerin Möglichkeiten geben, rationale Argumentation zu üben.

Ebenso könnte man von der Schulung im Führen rationaler Dialoge sprechen. Bezieht sich das erste Lernziel auf die Förderung der Intuition, so ist dieses zweite auf die Schulung der Strenge gerichtet. Typische Lernsituationen sind alle jene, in denen eine Behauptung gerechtfertigt werden soll, und hieran sind wieder viele psychische Aktivitäten beteiligt:

Begriffe abgrenzen durch Realhinweise, durch Aufzählen von Beispielen und Gegenbeispielen, durch Angabe von Oberbegriffen und charakteristische Eigenschaften; Begriffe miteinander vergleichen; Lösungswege analysieren; Lösungen testen und kontrollieren; Kontext beachten; Behauptungen anzweifeln; Sätze analysieren; Beispiele für Sätze angeben und mit ihnen Sätze testen; logische Abhängigkeit zwischen Sätzen überprüfen; Sätze beweisen; Beweise zergliedern und auf Vollständigkeit überprüfen; Fallunterscheidungen treffen; Satzhierarchien zusammenstellen, Systematisieren; Axiomatisieren; Scheinbeweise entlarven.

Es ist evident, dass die beiden Lernziele aufeinander bezogen sind: Einerseits muss Material bereits vorliegen, wenn es logisch geordnet werden soll, und logisches Ordnen erfordert selbst Intuition, Phantasie, denn es gibt keinen Algorithmus zum Beweisen. Andererseits ist ja das schöpferische Denken kein wildes Drauflosproduzieren, sondern wird immer auch zugleich problemadäquat gezügelt.

Inwieweit das zweite Lernziel einen zentralen Aspekt mathematischen Denkens anspricht, bedarf eigentlich keiner Erwähnung. Die Mathematik ist nun einmal die beweisende Wissenschaft, hier gehört die logisch begründende Rechtfertigung, die Analyse der Begründung, sozusagen mit zum Inhalt.

Ebenso ist aber unser zweites Lernziel auch einem erstrangigen Aspekt menschlicher Existenz im Ganzen zugeordnet: Der Mensch besitzt das Bestreben, über die Wirklichkeit zu sprechen, Zusammenhänge zu erkennen, Erklärungen zu finden, andere davon zu überzeugen, kurz: Erfahrungen zur Wirklichkeit rational zu ordnen. Im mathematischen Denken ist dieses allgemeine Bestreben „lediglich“ rigoros hochstilisiert.

Diesen Hang (nach dem Warum und Wieso zu fragen, nach Antworten zu suchen, zu grübeln, Einsicht zu wollen) ausdifferenzieren und mehr und mehr bewusst zu machen und dafür die notwendigen Instrumente zu entwickeln, ist m. E. eines der zentralen Lernziele der Schule überhaupt, speziell des Mathematikunterrichts.

Konsequenzen für die Gestaltung des Unterrichts sind u.a.: Begriffsgenese beachten (nicht vom Himmel des fertigen Systems fallen lassen); Begriffe genügend inhaltlich „absättigen“; beachten, dass es Stufen der Strenge gibt; Begriffe operativ fassen (etwa als Konstruktionsregeln); zeichnerische Darstellungen am richtigen Ort als Argumentationshilfen einsetzen; behutsame Sprachdisziplinierung; vorsichtige Eingewöhnung in formale Darstellungen; Netzcharakter von Begriffen betonen; zum Fragen, Anzweifeln, Verteidigen ermuntern („Ist das wirklich so?“ „Ist das immer so?“ „Warum muss es so sein?“ „Unter welchen Umständen ist es so?“ ...); Beweisschritte bewusst machen.

Im Hinblick auf die Lerninhalte scheint wiederum die Forderung nach reichstrukturierten Bereichen auf der Hand zu liegen: Hier (z. B. in der elementaren Zahlentheorie und euklidischen Geometrie) gibt es genügend überraschende Sachverhalte, die das Beweisbedürfnis auch anreizen, d.h. die Frage nach dem „Warum“ provozieren und dabei zur Begriffspräzisierung und Schematisierung drängen.

Unweigerlich kommt hier die Frage nach der Stellung der „Logik im Unterricht“ auf, die ich aber unmöglich diskutieren kann. Nur soviel sei gesagt, dass wir uns offen halten müssen für alle bisher bekannten Konzeptionen: Lorenzensche Dialoglogik, Kolmogorovsche Aufgabenlogik, Gentzens Kalkül des natürlichen Schließens und nicht *nur* für Aussagenlogik in Verbindung mit Mengenlehre (vgl. WALTHER 1974). Skepsis scheint jedenfalls geboten gegenüber dem Glauben, dass etwa ein Kurs in Aussagenlogik so ohne Weiteres zur Hilfe beim tatsächlichen Beweisen gereiche. Auch der Problemkreis der „Axiomatisierung im Unterricht“ gehört hierhin, der gleichfalls wohl noch zahlreicher grundsätzlicher Überlegungen und praktischer Erprobungen bedarf (vgl. Beispiel iii, S. 47).

Von wesentlicher Bedeutung scheint mir der Aspekt der Stufung von Strenge zu sein, also der Verzicht auf den Glauben, es gebe eine absolute und unveränderliche Strenge. Die Kunst der Lehrkraft muss es sein, die Anforderungen zwischen sinnerfüllter, subjektiver Überzeugtheit und objektiver Demonstrierbarkeit jeweils lernstufengerecht in Einklang miteinander zu bringen. Das ist ein ebenso delikates Geschäft wie die Förderung der

Kreativität. Nutzlos ist jedenfalls ein dogmatisches, vorgeführtes Beweisgebaren. Es ist nicht nur nutzlos, sondern geradezu heuchlerisch und verstößt frontal gegen das zweite Lernziel, indem ja die Schülerinnen und Schüler subjektiv zur Pseudoargumentation gezwungen werden. Abzulehnen ist aber auch jene falsche „Toleranz“, die sich darin gefällt, nur immer höchstens an die Plausibilität zu appellieren und die Strenge auf später zu verschieben. Vom ersten Schultage an müssen die Wörter „warum“, „wieso“, „denn“, „also“, „wenn-dann“, „weil“, „obwohl“ usw. eine hervorragende Rolle spielen. Die oft gehörte Faustregel (scheinbar psychologisch abgestützt) „Bis zu 14 Jahren empirisch — danach deduktiv“ ist irreführend, zumindest viel zu pauschal.

Einige Beispiele mögen andeuten, wie unser zweites Lernziel im Unterricht wirksam werden sollte.

(i) Additives Rechnen im „Zahlenraum“ bis 20 (1. Klasse)

Behauptung: $7 + 5 = 12$ Wie kannst du das prüfen? Stimmt es wirklich?

Ich kann in zwei Schritten rechnen, zuerst $7 + 3 = 10$, dann $10 + 2 = 12$.

- Ich kann von 7 aus um 5 weiterzählen.
- Ich kann es an einem Punktbild zeigen.
- Ich weiß, dass $6+6=12$ ist (12 ist das Doppelte von 6). Dann *muss* auch $7+5=12$ sein, *denn* 7 ist um 1 größer als 6 und „dafür“ ist 5 um 1 kleiner als 6.
- Ich kann es an Äpfeln, Nüssen, ... zeigen.
- Ich kann es Schritt für Schritt bekommen:

$7 + 1 = 8$, $7 + 2 = 9$, $7 + 3 = 10$, $7 + 4 = 11$, $7 + 5 = 12$, usw.

Vorsichtig und mit pädagogischem Takt sollte man „Argumente“ der Art „Das weiß ich von meiner Mutter“ „Das steht doch im Buch“ als nicht stichhaltig erfahren lassen.

Nun wissen wir ganz sicher, dass $7 + 5 = 12$ ist. Was wissen wir dann auch noch? Was wissen wir z. B. von $5 + 7$? Von $7 + 6$? Von $7 + 4$? Von ... ?

Vorhandenes Wissen wird hier benutzt, um neues Wissen abzustützen, sozusagen abzuleiten, und das ist doch ein Kernpunkt logischen Denkens.

(ii) Lokales Ordnen im Geometrieunterricht (Sekundarstufe I)

Zu beweisen sei (abbildungsgeometrisch) der Satz über die Mittelsenkrechten im (ebenen) Dreieck. Der „Beweisbaum“ (vgl. Abb. 4) zeigt, wie das lokale Ordnen intellektuell funktioniert, insbesondere was es heißt, die Netzwerkstruktur von Sätzen herauszuarbeiten.

An diesem Beispiel kann m. E. besonders eindrucksvoll demonstriert werden, worauf es bei rationaler Argumentation allgemein ankommt:

1. Die Einsicht in die Richtigkeit einer Aussage geschieht erst innerhalb eines Systems von „zugehörigen Aussagen“. Isolierte Einsicht ist gar keine Einsicht (Piaget).
2. Notgedrungen führt das logische Zurückverfolgen auf einen „Anfang“, d. h. auf Aussagen, die man nicht weiter auf andere zurückführen kann, deren Wahrheit „angenommen“ wird.
3. Argumentieren ist erst möglich, wenn man über einen gewissen Reichtum an Aussagen verfügt. Unwissende können nicht diskutieren; man kann nicht logisch ordnen, was einem höchstens vage bekannt ist.

(vgl. zu diesem Lernziel auch CHINTSCHIN 1965).

(iii) Sätze über Untergruppen endlicher zyklischer Gruppen (Sekundarstufe II)

Ausgangspunkt ist die Definition: $(G, \circ)$ ist eine endliche zyklische Gruppe genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|G| = n$ und ein $a \in G$ gibt, sodass jedes $b \in G$ als Potenz von a dargestellt werden kann:

$$b = \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{m\text{-mal}} = a^m.$$

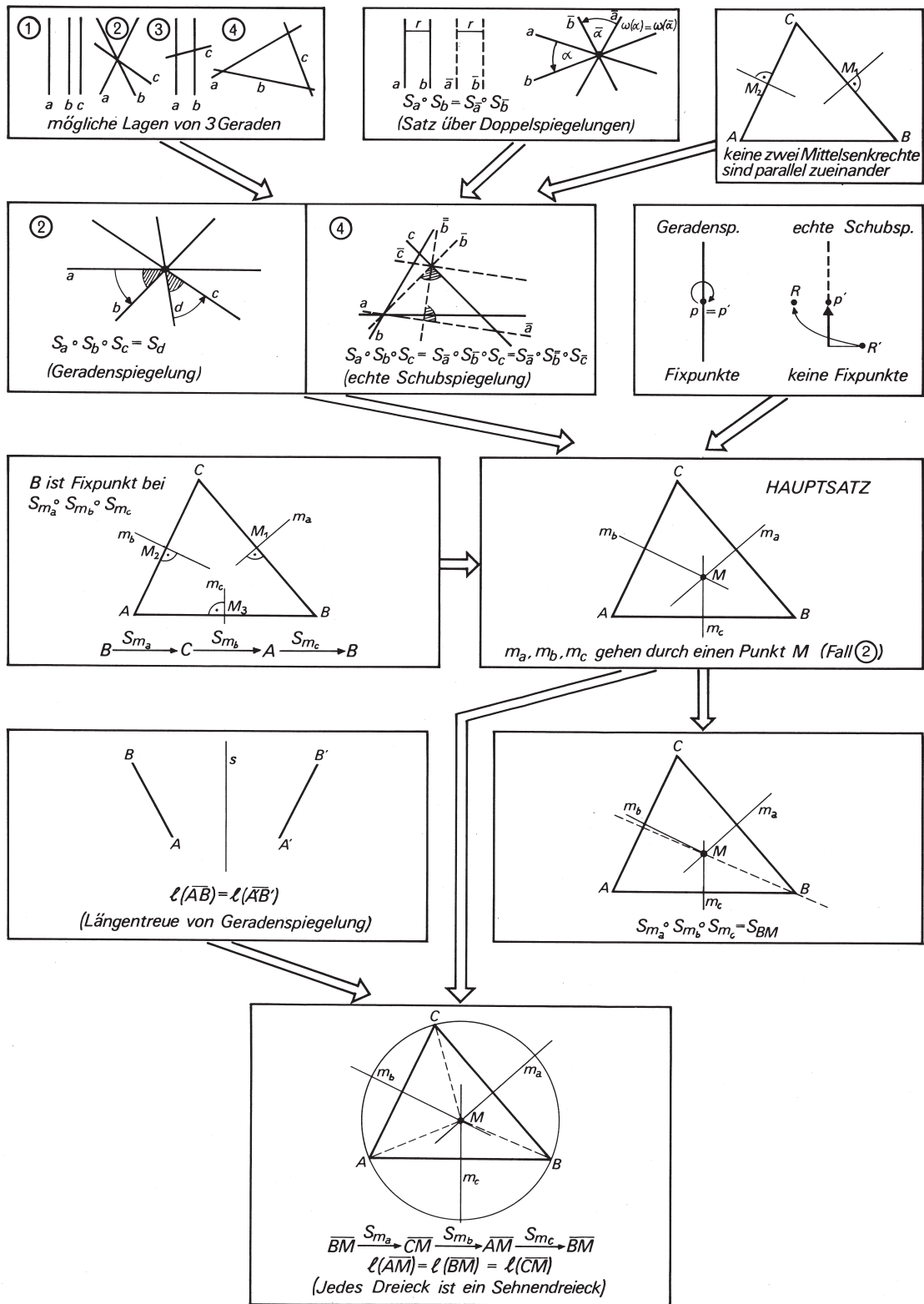


Abb. 4: „Beweisbaum“ zum Beweis des Satzes über die Mittelsenkrechten im (ebenen) Dreieck

Der „Gruppengraph“ (vgl. Abb. 5) dient (neben konkreten Beispielen) als ausgezeichnetes heuristisches Mittel zum Auffinden von Behauptungen und deren Beweisen.

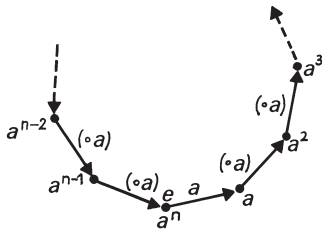


Abb. 5

Sätze:

- a) Die Elemente von G sind genau die n Potenzen $a, a^2, \dots, a^n$.
- b) $a^n = e$ (e ist neutrales Element in G).
- c) Invers zu a^m ist a^{n-m} (mit $m < n$).
- d) G ist eine abelsche Gruppe.
- e) Ist m ein Teiler von n , dann erzeugt a^m eine Untergruppe der Ordnung $n : m = k$.
- f) Ist m teilerfremd zu n , dann ist a^m ein erzeugendes Element von G .

Beweis von (f):

Im Sonderfall $m = 1$ ist nichts zu beweisen (Definition).

Es sei also $m \geq 2$.

Wir bilden die n -gliedrige Folge (Konstruktion)

$a^m, a^{2m}, \dots, a^{nm}$ („Überspringen“ im Graph).

In jedem Falle sind diese Glieder Elemente von G (Abgeschlossenheit).

Zu beweisen ist „nur“ noch: Diese n Glieder der Folge sind paarweise voneinander verschieden, d.h. nicht zwei von ihnen sind gleich.

Wieso kann das nicht sein?

Wäre nämlich (indirekte Argumentation!)

$a^{im} = a^{jm}$ mit $1 \leq i < j \leq n$,

dann wäre ja

$e = a^{(j-i)m}$ mit $j - i < n$ (Folgerung aus der Annahme).

Dann muss aber nach (a), (b), (c)

$e = a^{(j-i)m} = a^n$ oder

$e = a^{(j-i)m} = a^{2n} \dots$ oder

$e = a^{(j-i)m} = a^{kn}$

mit $k \in \mathbb{N}$ sein (Folgerung aus bereits bewiesenen Sätzen). Demnach wäre also n ein Teiler von $(j - i)m$. Nun sind m und n teilerfremd (Einbringen der Voraussetzung, die ja bisher nicht benutzt wurde), d.h. m und n haben keinen gemeinsamen Primfaktor (Analyse der Voraussetzung). Demnach müsste n ein Teiler von $j - i$ sein (Reaktivierung des Satzes: Wenn $a|bc$ und a teilerfremd zu b , dann $a|c$). Das aber ist wegen $j - i < n$ unmöglich.

Die Annahme

$a^{im} = a^{jm}$ mit $1 \leq i < j \leq n$

müssen wir also fallenlassen, denn sie führt zu dem Widerspruch

$j - i < n$ und $n|j - i$.

Das bedeutet aber, dass alle Glieder der Folge $a^m, a^{2m}, \dots, a^{nm}$ paarweise verschieden sind, mithin also a^m ganz G erzeugt.

Spezialisierung: Ist n eine Primzahl, so ist jedes Element von G außer e erzeugend.

Dieses letzte Beispiel (iii) zeigt etwas von der Kraft „moderner“ axiomatischer Denkweisen: Man beweist etwas über eine Menge von Dingen, die inhaltlich gar nicht bekannt sind, über die nur gewisse Voraussetzungen

gemacht werden. Insofern ist es auch ein Beispiel für das 4. Lernziel (vgl. unten). Die spezielle Forderung liegt hier nicht wie im Beispiel (ii) darin, bereits vorhandene Aussagen über anschaulich einleuchtende Sachverhalte in logischen Zusammenhang miteinander zu bringen, sondern darin, sozusagen aus den Buchstaben des Gesetzten und nur aus ihnen möglichst weitgehende Schlüsse zu ziehen. Freilich kann und sollte dies begleitet werden durch den geometrischen Aspekt (Graph) und vor allem sollte das höhere Argumentationsniveau nun auch ausgenutzt werden:

Interpretation der Sätze in der Zahlentheorie (kleiner Satz von Fermat, Restklassengruppen, periodische Brüche), Geometrie (drehsymmetrische Ornamente), Gleichungslehre (Einheitswurzeln).

(L3) Der Unterricht soll dem Schüler/der Schülerin Möglichkeiten geben, die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren.

Man könnte auch sagen: Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, Situationen der Wirklichkeit zu mathematisieren. Typische Lernsituationen sind solche, in denen Mathematik angewandt werden soll. Dazu gehören: Beobachten und Beschreiben von Wirklichkeitsausschnitten; Schematisieren; Idealisieren; Sammeln und Ordnen mathematisch relevanter Daten (Zählen, Messen, Schätzen, Tabellieren, Auflisten, Schaubilder herstellen, ...); Beschreiben des Zusammenhangs zwischen den Daten; Auffinden mathematisch sinnvoller Fragestellungen; Formulieren der Fragestellung in der mathematischen Sprache; Lösen der Fragestellung innerhalb mathematischer Begriffssysteme (Rechnen); Ausdeuten der Lösung; Typisieren von Wirklichkeitssituationen; Interpretieren innermathematischer Aussagen (vgl. dazu auch HILTON 1974).

In diesem dritten Lernziel wird die Mathematik als nützliche, nutzbare Wissenschaft angesprochen. Welchen erkenntnistheoretischen Standpunkt man auch einnimmt, jedenfalls wird die Rolle der Wirklichkeit als Quelle von Fragestellungen und als Bereich von Interpretationen auch von „reinsten“ Mathematikern mindestens kaum gänzlich in Abrede gestellt. „Mit anderen Worten, wenn sich ein mathematischer Gegenstand sehr weit von seiner empirischen Quelle entfernt hat oder wenn mit ihm viel ‚abstrakte‘ Inzucht getrieben worden ist, besteht die Gefahr der Degeneration“ (VON NEUMANN 1974, S. 46).

Es ist viel über den eigenartigen Sachverhalt spekuliert und philosophiert worden, wieso sich die angeblich erfahrungsunabhängige Mathematik „trotzdem“ vorzüglich zur Beschreibung von Wirklichkeitsbereichen eignet, wieso gerade manche der besten, fruchtbarsten innermathematischen Ideen ihren genetischen Ausgangspunkt in der Empirie hatten.

Dieser Wirklichkeitsbezug der Mathematik korrespondiert wiederum mit einem wesentlichen Aspekt der geistigen Existenz des Menschen überhaupt: dem Bestreben, Wirklichkeit zu beherrschen, d.h. Voraussagen zu treffen, ökonomisch zweckmäßige Entscheidungen zu treffen, Technik zu betreiben.

Für die Gestaltung des Unterrichts hat das Lernziel naheliegende Konsequenzen: Auswahl hinreichend interessanter und angemessen offener Sachsituationen; Ermunterung zum planmäßigen, bewussten Beobachten; Trainieren des Schematisierens und Idealisierens; Sensibilisierung des mathematischen Fragens; Bewusstmachen der strukturellen Analogien zwischen realen Gegebenheiten und mathematischer Sprache, d.h. Bewusstmachen der „Modellbildung“; Herausarbeiten von Typen strukturgleicher Situationen; Training im Aufsuchen verschiedener „Verkörperungen“ derselben Struktur; Einüben wichtiger Lösungsalgorithmen; Bewusstmachen der Opfer, die Wirklichkeitsschematisierung kostet; Erfahrungen zur Grenze des Mathematisierens.

Das Lernziel wird aber *nicht* erfüllt, wenn Adam-RIESE-Didaktik praktiziert wird, d.h. wenn zu einer Auswahl sogenannter praktischer Fälle des Lebens zugehörige Rezepte verabreicht und eingetrichtert oder wenn nach der Behandlung eines „Satzes“ Anwendungsaufgaben gerechnet werden.

Im Hinblick auf die Inhalte legt das dritte Lernziel nahe: Euklidische Geometrie einschließlich topologischer Aspekte (Mathematisierung des Anschauungsraumes), Stochastik (Mathematisierung von Zufallsphänomenen), Reelle Zahlen/Analysis (Messprozess, Größenbereiche, Funktionen über „reellen“ Größenbereichen) und ein Betonen der Strukturbegriffe (Mengen, Relationen, Abbildungen, ...) als Instrumente des Ordners. Indes muss beachtet werden, dass das dritte Lernziel nur zur lokalen Stofforganisation wirksam werden kann. Es ist

offensichtlich nicht möglich, den Stoff im Großen (global) aus Mathematisierungsprozessen heraus zu organisieren (vgl. dazu BECKER 1973).

Einige Beispiele zur Illustration:

(i) Graphen (4.-6. Kl.)

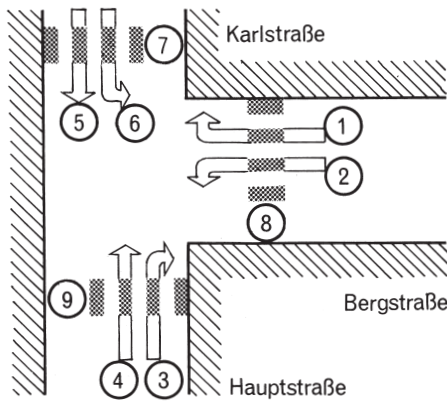


Abb. 6

Problem: Für jeden der 9 Verkehrsströme soll eine Ampelanlage eingerichtet werden (vgl. Abb. 6). Wie sollte man die Ampeln schalten, damit der Verkehr möglichst flüssig ist, aber auch möglichst gefahrlos?

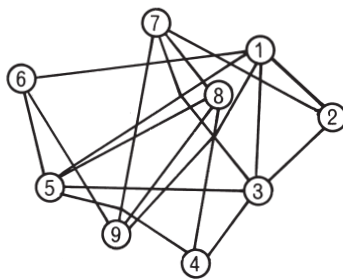
Umformulierung des Problems: Welcher Verkehrsstrom ist mit welchen anderen verträglich, das heißt welche Ampeln können gleichzeitig grün sein? Wie kann man Takte zusammenstellen, sodass je möglichst viele miteinander verträgliche Ampeln gleichzeitig grün sind und auch jede Ampel in wenigstens einem Takt einmal „grün“ zeigt?

Extreme „Lösungen“:

a) Es ist nacheinander nur immer eine Ampel „grün“. Man braucht 9 Takte. Der Verkehr ist gefahrlos, aber nicht flüssig.

b) Alle Ampeln sind stets „grün“. Der Verkehr ist zwar flüssig (?), aber tödlich.

Systematische Untersuchung führt zu einer „Verträglichkeitstabelle“ bzw. zu einem „Verträglichkeitsgraphen“ (vgl. Abb. 7).



Eine mögliche optimale Schaltung

„frei“			„gesperrt“					
1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	1	2	6	7	8	9
1	5	6	2	3	4	7	8	9
7	8	9	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮								

Abb. 7

Die Situation ist jetzt ins Mathematische übersetzt:

Der Graph enthält aus der ursprünglichen realen Situation nur noch die Information, welche Verkehrsströme mit welchen anderen zugleich die „Kreuzung“ betreten können (Schematisierung!), diese aber übersichtlich und erschöpfend.

Mathematische Neuformulierung des Problems: Suche aus dem Graphen maximale vollständige Teilgraphen und zwar derart, dass jede „Ecke“ mindestens einmal in einem solchen Teilgraphen vorkommt. Ein Teilgraph heißt dabei „vollständig“, wenn jede seiner Ecken mit jeder anderen seiner Ecken verbunden ist. Bezogen auf die Ampelsituation bedeutet dies, dass die Verkehrsströme dieses Teilgraphen einander nicht stören. Die Forderung „maximal“ sichert, dass immer möglichst viele Verkehrsströme, die sich nicht stören, fließen sollen.

Durch systematisches Probieren findet man mögliche optimale Lösungen, insbesondere das Resultat: Es ist nicht möglich, gleichzeitig 4 Ampeln (oder mehr) freizugeben. Das Problem gibt Anstöße zu neuen Problemen, und zwar bezüglich der Sachsituation (z.B.: Wie kann man durch niveaueverschiedene Übergänge den Verkehr verbessern?) und auch bezüglich der innermathematischen Situation (vollständige Graphen).

(ii) Schwerpunkt des Dreiecksumfangs (Sekundarstufe I)

Problem: Eine Maschine soll aus einem Blech dreieckige Stücke vorgegebener Form und Größe ausstanzen. Wo muss die Kraft der Stanzachse angreifen? Die Sachanalyse führt zur Umformulierung in die Sprache der Geometrie: Wo liegt der Schwerpunkt des Umfangs eines Dreiecks?

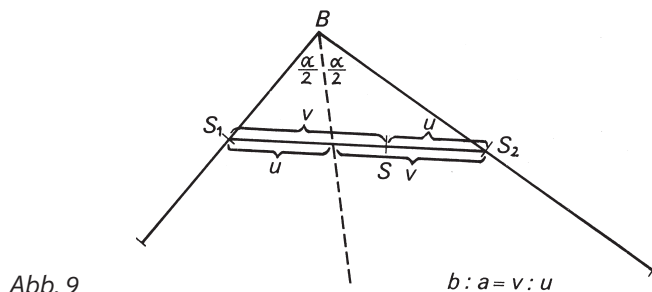
Mögliche Lösungsschritte:

Der Schwerpunkt einer Strecke ist ihr Mittelpunkt (vgl. Abb. 8).



Der Schwerpunkt eines Streckenzuges ABC mit den Längen $l(AB) = a$, $l(BC) = b$ und den Schwerpunkten S_1 von AB, S_2 von BC ist der Punkt S, der die Strecke $\overline{S_1 S_2}$ im Verhältnis $b : a$ teilt.

Falls der Streckenzug keine Strecke ist, kann S über die Konstruktion der Winkelhalbierenden ABC gewonnen werden (vgl. Abb. 9).



Der Schwerpunkt S eines dreigliedrigen, geschlossenen Streckenzuges (Dreiecks) ABC ist der Mittelpunkt des Inkreises des eingeschriebenen Seitenmittendreiecks $S_1 S_2 S_3$, denn in Abbildung 10 gilt

$$u : v = b : a = \frac{b}{2} : \frac{a}{2} \quad (S_{12})$$

$$x : y = c : b = \frac{c}{2} : \frac{b}{2} \quad (S_{13})$$

$$t : w = c : a = \frac{c}{2} : \frac{a}{2} \quad (S_{23})$$

$$l(\overline{S_{12} S}) : l(\overline{S S_3}) = \frac{c}{a + b}.$$

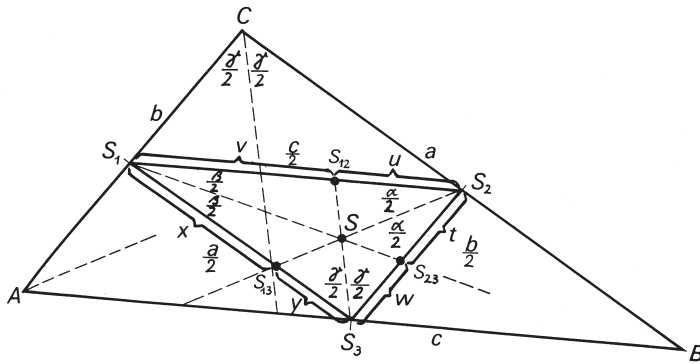


Abb. 10

Das ist m. E. ein sehr schönes Beispiel für die gegenseitige Befruchtung von mechanischem und geometrischem Denken und dafür, wie mechanisch-technische Fragen zu nichttrivialen geometrischen Problemen führen (vgl. dazu auch FREUDENTHAL 1968, S. 165 ff.).

Überhaupt sollte der Versuch gemacht werden, die lokale Stofforganisation der Geometrie der Sekundarstufe I stärker aus zu mathematisierenden Situationen in Alltag, Technik, Produktion, ... heraus zu entwickeln, und das nicht nur für Hauptschülerinnen und Hauptschüler.

(iii) CAUCHY – Stetigkeit (Sekundarstufe II)

Eine Maschine produziert plane Werkstücke von quadratischer Form. Gemessen wird und steuerbar ist die Seitenlänge x der Werkstücke. In welchem Intervall um x_0 müssen diese Seitenlängen liegen, wenn der Flächeninhalt $f(x) = x^2$ um weniger als ε von $f(x_0) = x_0^2$ abweichen darf?

Der Sollwert für die Flächeninhalte sei etwa 36 Flächeneinheiten, die Toleranz $\frac{1}{100}$ Flächeneinheiten, der Sollwert für die Seitenlänge also 6 Längeneinheiten. Durch Nachrechnen findet man, dass alle Längen z.B. im Intervall $]5,996; 6,004[$ erlaubt sind, der Messwertfehler also 0,004 (LE) betragen darf. In erster Verallgemeinerung und durch Diskussion am Schaubild der Funktion

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, findet man:

Zu jedem vorgegebenen Produktionswertfehler $\varepsilon > 0$ kann ich einen Messwertfehler $\delta > 0$ so bestimmen, dass alle Messwerte aus dem Intervall $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ zu Produktionswerten $f(x)$ aus dem Intervall $]f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon[$, also zu zulässigen Werkstücken führen.

In zweiter Verallgemeinerung ergibt sich (vgl. Abb. 11):

Seien $x \in \mathbb{R}$ Eingangswerte einer frei bestimmbaren Größe und $f(x)$ die von x eindeutig erzeugten Ausgabe-
werte. Falls es zu jedem vorgegebenen Ausgabewertfehler $\varepsilon > 0$ möglich ist, einen Eingangswertfehler $\delta > 0$ so zu bestimmen, dass für alle Eingangswerte des Intervalls $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ die Produktionswerte im Intervall $]f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon[$ liegen, dann soll die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, in x_0 stetig heißen.

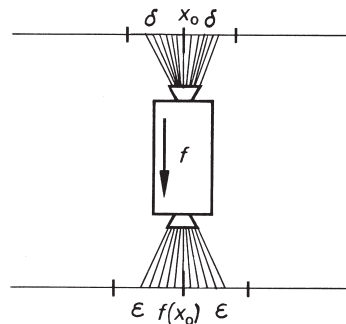


Abb. 11

Man kann sich Abbildung 11 als Maschine vorstellen. Die Stetigkeit von f in x_0 bedeutet dann grob gesagt: Man kann die Eingabewerte um x_0 herum stets so handhaben, dass die produzierten Ausgabewerte $f(x)$ jede Genauigkeitsforderung um $f(x_0)$ herum erfüllen können.

Dieser von Produktionsprozessen ausgehende Zugang zur Stetigkeit gibt m.E. eine angemessene intuitive Grundlage und entkleidet die Stetigkeit ihres esoterischen Charakters, den sie sonst häufig im Unterricht einnahm, wenn sie überhaupt thematisiert wurde.

Alles in allem: Lokale Begriffsentwicklung, die von der Mathematisierung realer Situationen ausgeht, verschafft ein breites Feld intuitiver Vorerfahrungen, lässt den Nutzen der Begriffsbildung erkennen und führt (bei „guten“ Beispielen) sofort ins Zentrum der angestrebten Begriffsbildung.

(L4) Der Mathematikunterricht soll der Schülerin/dem Schüler Möglichkeiten geben, formale Fertigkeiten zu erwerben.

Formale Fertigkeiten sind solche, die sich auf die Handhabung von Sprache im weiteren Sinn (Umgangssprache, Diagramme, Schemata, Symbole, Zeichen, ...) beziehen und zwar derart, dass durch die „geregelter“ Manipulation mit Sprachelementen unter (vorübergehender) Ausblendung von semantischen Bezügen inhaltliche Fragestellungen gelöst werden. Es geht hier also um die Förderung des algorithmischen, kalkülhaften Moments mathematischen Arbeitens, in das wiederum eine Fülle von Einzeltätigkeiten eingehen: Unterscheiden von Zeichen und Bezeichnetem, von „Wort“ und „Gegenstand“; Unterscheiden von Aussagen über das Zeichen, von Aussagen über das Bezeichnete (Metasprache, Objektsprache); Artikulation der Beziehungen zwischen Gegenstandsbereich und Sprachbereich; Übertragen von Sachverhalten des Gegenstandsbereiches in den Zeichenbereich („Codieren“); Ausdeuten von sprachlichen Gebilden („Decodieren“); Handhaben von vorgegebenen Syntaxregeln (zum Erzeugen oder Transformieren von Zeichen oder Zeichenreihen), speziell Handhaben von Variablen, Termen, Gleichungen; Aufbau von Algorithmen zu geeigneten inhaltlich vorgegebenen Fragestellungen; Ausführen algorithmischer Prozesse und Rückinterpretation der Lösungen; formales Ableiten; Erfahrungen zur Grenze algorithmischer Vorgehensweisen.

In diesem Lernziel wird das formale Gesicht der Mathematik angesprochen, Mathematik als Wissenschaft von den formalen Systemen. Dieses Gesicht ist zweifellos dasjenige, das auf Außenstehende etwa zu gleichen Anteilen Schrecken und Bewunderung hervorruft: Das Hantieren mit Symbolen erscheint vielfach als Geheimschrift und wird als l'art-pour-l'art-Spiel unter- oder als wunderbares Beweismittel für alles in der Welt überbewertet, der Mathematiker entsprechend als Rechenmaschine abqualifiziert oder als Zauberer mythologisiert. Tatsächlich ist Mathematik ohne das formale Moment undenkbar; Formalismus führt durch die Distanzierung von semantischen Bezügen zu Verallgemeinerungen, die weit über das Anschaulich-Fassbare hinausgehen; Formalismus erlaubt rigorose Präzisierung der Denkschritte durch Verbannung anschaulich-plausibler Vorstellungselemente; Formalismus macht Begriffsbildung objektivierbar, überprüfbar, mitteilbar; Algorithmen sichern gewisse Gedankengänge ein für alle Male ab und entlasten den Geist zugunsten produktiven Denkens. Damit ist auch bereits die allgemein-menschliche Bedeutung von Formalismus angesprochen:

Der Mensch entwirft Zeichen, um mithilfe von Zeichen Wirklichkeit widerzuspiegeln, diese Wirklichkeit aber auch zu übersteigen, indem Zeichensysteme zu neuen Wirklichkeitsbereichen sui generis gemacht werden. Eine genetische Wurzel ist sicher die „Lust am Fabulieren“, am Erfinden und Reproduzieren von Reimen, Rhythmen, Zeichenfiguren, Wortspielen, ...

Konsequenzen für die Gestaltung des Unterrichts: Aufgreifen der Spontaneität für die Produktion „sinnleerer“ Figuration (z. B. Kalkülspiele in der Grundschule); Pflege lokaler Rechenstrategien; frühe Gewöhnung an den Gebrauch von Variablen; Bewusstmachen des Unterschiedes zwischen Zeichen und Bezeichnetem (z. B. zwischen Ziffer und Zahl, zwischen Rechnen und Verknüpfen) ohne Purismus; Trainieren des Übersetzens von Sachverhalten und Prozessen in Sprache; Ermunterung zum Auffinden von Möglichkeiten zur Schematisierung (in Blockplänen, Übersichtsskizzen, Flussdiagrammen usw.); Einüben „lebenswichtiger“ Algorithmen (z. B. schriftliche Rechenverfahren, algebraische Kalküle); Einsatz von Recheninstrumenten (Taschenrechner, Tischrechner); Pflege des formalen Argumentierens, des formalen Ableitens.

Auf einen Punkt sei besonders hingewiesen: Im Zuge der Modernisierung sind vielerorts verdienstvolle Anstrengungen unternommen worden, das Grundverständnis für mathematische Begriffsbildungen mehr als bisher zu verbessern. Dabei ist aber mitunter die Bedeutung des formalen Aspekts unterbewertet oder als Gegenpol angesehen worden.

Wenn ein Schüler oder eine Schülerin z.B. weiß, was es bedeutet, eine Gleichung zu lösen, also diejenigen Elemente aus einer Grundmenge auszusondern, die die gegebene Gleichung erfüllen, dann hat er damit zunächst noch gar nichts in der Hand, dieses Aussondern auch praktisch durchzuführen. Es besteht halt ein Unterschied zwischen Wissen (Verstehen) und Können, Verständnis erzeugt nicht automatisch Fertigkeit. Andererseits besteht auch immer die Gefahr verfrühter Formalisierung und Indoktrination von Algorithmen (ihre Beherrschung lässt sich ja so schön leicht abtesten!). Die Lehrkraft steht vor dem Problem, zwischen der Szylla semantischer Überfrachtung und der Charybdis kurzatmiger Kalkülsierung das Schiff des Unterrichts möglichst ungefährdet hindurchzusteuern.

Was die Inhalte des Unterrichts angeht, so wirft unser viertes Lernziel u.a. die Frage nach der Stellung der Algebra und der Informatik auf. Unbestritten scheint zu sein, dass heute alle Schülerinnen und Schüler allgemeinbildender Schulen ein gewisses Maß algebraischer *Methoden* lernen, also z.B. den Umgang mit Formeln für Größenbestimmungen (Flächeninhalte, Volumina) in der Geometrie oder das Lösen von Sachaufgaben unter Mithilfe des Gleichungs- und Ungleichungskalküls. Jedenfalls würde ich das als eine naheliegende Konsequenz des vierten Lernziels ansehen. Was aber u.a. bisher weithin offen geblieben ist, ist die Frage, wieweit Zahlenlehre, Geometrie, Analysis mit algebraisch-algorithmischen Methoden durchsetzt werden und inwieweit algebraische Inhalte im engeren Sinne (Gruppentheorie, Vektorraumtheorie, ...) und Inhalte der Informatik als solche thematisiert werden sollen.

Nach meiner Einschätzung besteht zur Zeit die Tendenz, formale (algebraisch-algorithmische) Elemente doch im Wesentlichen „nur“ als Instrumente, als Methoden, wirksam werden zu lassen und dies auch erst nach einer angemessenen Phase mehr intuitiver und naiver Auseinandersetzung und weniger als Inhalte mit eigenem Gewicht.

Einige Beispiele zur Illustration:

(i) *Erfahrungen zur KLEINschen Vierergruppe (Primarstufe)*

Decklagen des Rechtecks: Auf welche Weisen kann eine rechteckige Glasscheibe in den zugehörigen Rahmen eingesetzt werden? Auffinden, Beschreiben und zeichnerisches Fixieren der 4 möglichen Lagen (Zustände) (vgl. Abb. 12):

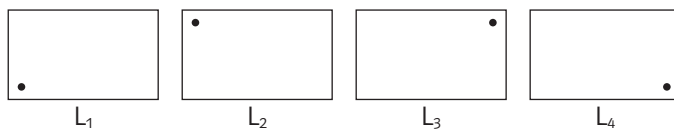


Abb. 12

Deckbewegungen des Rechtecks: Wie kann man von einer Lage in eine (andere) Lage kommen? Auffinden, Beschreiben und Symbolisieren der Bewegungen (Operatoren) (vgl. Abb. 13)

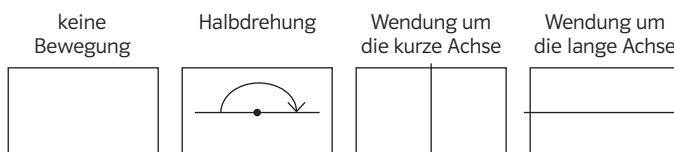
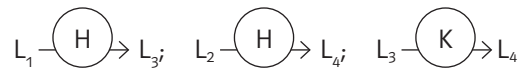


Abb. 13

Zustand-Operator-Zustand-Spiele, handelnd, zeichnerisch, symbolisch:



„Rechnen“ mit Deckbewegungen, handelnd, zeichnerisch, symbolisch:

„Wenn wir zuerst an der kurzen Achse wenden und dann an der langen Achse wenden, dann erhalten wir immer dasselbe Ergebnis wie bei einer Halbdrehung“. „Zuerst K, dann L liefert dasselbe wie H“.



Beobachtungen an der Verknüpfungstafel, Vergleich mit einer Einmaleins-Tabelle.

Übertragung auf andere Situationen: „Hexen-Einmaleins“ mit 1, 3, 5, 7 und mit „Verkürzung“ zur 8; Steinreihen legen; Schalterspiel, Platztauschspiel, ...

Es sei angemerkt, dass es hier (natürlich!) nicht um Gruppentheorie an sich geht, sondern darum, über ein gewisses Maß von Formalisierung direkte Erfahrungen angemessen zu versprachlichen und dadurch auch strukturelle Verwandtschaften zu entdecken und zu artikulieren (Formalisierung als Artikulationshilfe!).

(ii) (Sekundarstufe I)

Gegeben sei der Term

$$T = \frac{3z}{a + \sqrt{ab} + b}$$

über $\mathbb{R}$, gewonnen etwa aus der Geometrie: Höhe eines Pyramidenstumpfs in Abhängigkeit von Volumen z , Grundfläche a , Deckfläche b .

(1) Berechne T , wenn a , b , z zahlenmäßig gegeben sind. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert das „operative Aufknacken“ des Terms. Die Schülerinnen und Schüler müssen erkennen, dass T ein Quotient $\frac{T_1}{T_2}$ ist, dass T_1 wiederum ein Produkt ist usw. Das Ausrechnen erfolgt als Tätigkeit in der Zeit und wird als lineares Programm notiert, etwa:

- (1) $z \cdot 3 = S_1$
- (2) $a \cdot b = S_2$
- (3) $\sqrt{S_2} = S_3$
- (4) $a + b = S_4$
- (5) $S_2 + S_4 = S_5$
- (6) $\frac{S_1}{S_5} = T$

Die Bestandteile 3, z , a und b werden oben notiert, teilweise doppelt. Dann werden schrittweise die Operationen ausgeführt, aus denen sich der Term aufbaut. Schritt für Schritt entstehen komplexere Verknüpfungen. Man sieht sehr schön, dass zwei Multiplikationen und zwei Additionen und eine Division ausgeführt werden müssen und eine Quadratwurzel zu ziehen ist.

Es ist überhaupt zu erwarten, dass durch den Einfluss der Informatik eine höhere Sensibilisierung für numerische und algorithmische Verfahrensweisen und dann vielleicht auch ein höherer einschlägiger Fertigungsgrad erzielt wird.

Noch deutlicher wird der Aufbau des Terms durch Übersetzen in dieses Diagramm erfahren (vgl. Abb. 14).

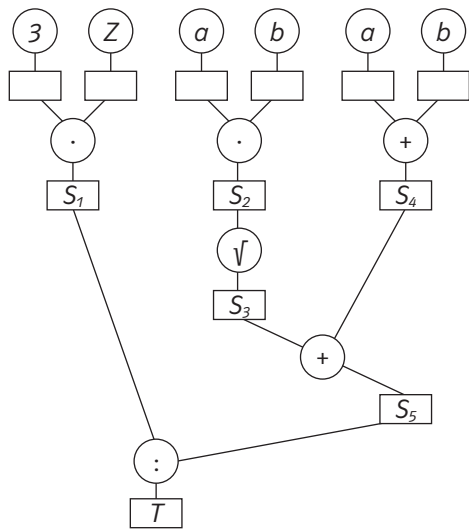


Abb. 14

(2) Forme T so um, dass der Nenner keine Wurzel mehr hat. Zur Lösung dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler u. a. erkennen, dass der Nenner die Form $x + y$ mit $x = a + b$, $y = \sqrt{a \cdot b}$ hat (Termersetzung!), dass die Gleichung $(\sqrt{u})^2 = u$ in $\mathbb{R}_0^+$ gilt und dass man zweckmäßigerweise mithilfe der 3. Binomischen Formel T erweitert, also:

$$T = \frac{3z}{(a+b) + \sqrt{ab}} = \frac{3z((a+b) - \sqrt{ab})}{((a+b) + \sqrt{ab})((a+b) - \sqrt{ab})} = \frac{3z(a+b - \sqrt{ab})}{a^2 + ab + b^2}$$

(3) Was ist der Definitionsbereich von T , d. h. für welche Zahlen-Tripel $(z, a, b) \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet T eine Zahl? Offensichtlich darf z beliebig aus $\mathbb{R}$ sein. Der Nenner darf nicht 0 sein, also $a + b + \sqrt{ab} \neq 0$.

Ferner muss $ab \geq 0$ sein, also $a \geq 0$ und $b \geq 0$ oder $a \leq 0$ und $b \leq 0$. Insgesamt ergibt sich als Definitionsbereich für T :

$$D_T = \{(z, a, b) \in \mathbb{R}^3 \mid (a \neq 0 \vee b \neq 0) \wedge ab \geq 0\},$$

was man natürlich auch anders schreiben kann.

(iii) GAUßscher Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme (Sekundarstufe II)

Neben den schriftlichen Normalverfahren zu den vier Grundrechenarten und den Verfahren zum Umformen von Termen gehört heute ein Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme zum Grundbestandteil mathematischer Fertigkeiten. Lineare Gleichungssysteme spielen eine wachsende Rolle in den Anwendungen (z. B. lineare Wirtschafts algebra), außerdem hat man über lineare Gleichungssysteme einen überzeugenden Zugang zu Begriffsbildungen der Linearen Algebra überhaupt.

Das Lösungsverfahren ist bekanntlich der Gaußsche Algorithmus. Er besteht darin, ein beliebiges $m \times n$ -System (m Gleichungen, n Variable, vgl. Abb. 15) durch elementare Umformungen (Vertauschung von Gleichungen, Multiplikation einer Gleichung mit einer reellen Zahl ungleich 0, Addition zweier Gleichungen) in „Dreiecksgestalt“ mit „Führungskoeffizienten“ 1 zu bringen, was immer möglich ist (vgl. Abb. 16).

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Abb. 15

$$\underbrace{\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline \end{array}}_{\text{Koeffizienten-Matrix } A} \quad \underbrace{\quad}_{\text{System-Matrix } S}$$

Abb. 16

Dieses Matrizenschema liefert dann nicht nur durch „Hinaufrechnen“ die Lösungen, falls es welche gibt, sondern informiert auch vollkommen über die Existenz von Lösungen und die Struktur der Lösungsmengen:

- Es gibt (mindestens) eine Lösung, falls die Anzahl der „Führungseinsen“ in A gleich der in S ist.
- Es gibt genau eine Lösung, falls die Anzahl der „Führungseinsen“ in A und S mit n übereinstimmt.
- Es gibt mehr als eine Lösung, falls die Anzahl der „Führungseinsen“ in A und S übereinstimmt und noch mindestens eine Gleichung $0 = 0$ auftritt.
- Es gibt keine Lösung, falls S mehr „Führungseinsen“ enthält als A (es kann höchstens eine mehr geben). Natürlich ist die Anzahl der „Führungseinsen“ der Rang der Matrizen. Für $m = n = 3$ ergeben sich nach dem Gauß-Algorithmus die sieben Fälle in Abbildung 17 und keine anderen.

Schlussbemerkung:

Die Übersicht in Abbildung 18 möge noch einmal den hier vertretenen Ansatz zur Formulierung allgemeiner Lernziele zusammenfassen.

Es sei auch noch einmal betont: Allgemeine Lernziele lassen sich nicht so abtesten wie operationalisierte Feinlernziele; sie beziehen sich auf die gesamte Schulzeit, und der Grad ihrer Verwirklichung lässt sich eher in einer gewissen Haltung erkennen, in der ein Schüler oder eine Schülerin an mathematische Fragen herangeht. Sie geben gewisse Eingrenzungen für die globale Stoffauswahl, lassen aber dabei noch sehr viel Freiraum. Direkte Konsequenzen ergeben sich für die Gestaltung des Unterrichts und die lokale Stofforganisation. Es wäre m. E. eine sinnvolle Aufgabe, den hier vorgetragenen Ansatz (der nur als erster Entwurf gedacht ist) fortzuentwickeln, denn die zunehmende Stofffülle und abnehmende Lernzeit erzwingt immer härter die Beantwortung der Frage, was denn nun wirklich wichtig ist. Natürlich wird es nie eine präzise endgültige Antwort geben können, denn die Mathematik entwickelt sich und die Gesellschaft ändert sich.

Gauß-Endform (Schema)	Rang der		Lösungsmenge enthält	Geometrische Interpretation der Lösungsmenge
	Koeffizienten-Matrix	System-Matrix		
$\begin{array}{ccc c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot \end{array}$	3	3	1 Element	Punkt
$\begin{array}{ccc c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & 1 \end{array}$	2	3	kein Element	----
$\begin{array}{ccc c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot \\ & & 0 & 0 \end{array}$	2	2	unendlich viele Elemente 1 Parameter	Gerade
$\begin{array}{ccc c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}$	1	2	kein Element	----
$\begin{array}{ccc c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}$	1	1	unendlich viele Elemente 2 Parameter	Ebene
$\begin{array}{ccc c} & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}$	0	1	kein Element	----
$\begin{array}{ccc c} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}$	0	0	unendlich viele Elemente	Der ganze 3-dimensionale Raum

Abb. 17

Mensch	Mathematik	allgemeines Lernziel	
		der Schule	des Mathematikunterrichts
als schöpferisches, erfindendes, spielendes Wesen	als schöpferische Wissenschaft	Entfaltung schöpferischer Kräfte	heuristische Strategien lernen
als nachdenkendes, nach Gründen und Einsicht suchendes Wesen	als beweisende, deduzierende Wissenschaft	Förderung des rationalen Denkens	Beweisen lernen
als gestaltendes, wirtschaftendes, Technik nutzendes Wesen	als anwendbare Wissenschaft	Förderung des Verständ- nisses für Wirklichkeit und ihre Nutzung	Mathematisieren lernen
als sprechendes Wesen	als formale Wissenschaft	Förderung der Sprachfähigkeit	Formalisieren lernen

Abb. 18

Literatur

- BECKER, G.: *Formen und Prinzipien der Stofforganisation im mathematischen Unterricht*. Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 7. Bundestagung für Didaktik der Mathematik. Hannover: Schroedel 1973, S. 37 – 44.
- CHINTSCHIN, A. J.: *Über die erzieherische Wirkung des Mathematikunterrichts*. In: Probleme des Mathematikunterrichts. Berlin: Volk und Wissen 1965, S. 128 ff.
- COURANT, R.: *Mathematik in der modernen Welt*. In: M. OTTE: Mathematiker über Mathematik. Berlin/Heidelberg/Göttingen: Springer 1974, S. 181 – 201.
- FREUDENTHAL, H.: *Mathematik in Wissenschaft und Alltag*. München: Kindler 1968.
- FREUDENTHAL, H.: *Lernzielfindung im Mathematikunterricht*. In: Zeitschrift für Pädagogik 20 (1974), H. 5, S. 710 – 738.
- HILTON, P.: *Die Ausbildung von Mathematikern heute*. In: M. OTTE: Mathematiker über Mathematik. Berlin/Heidelberg/Göttingen: Springer 1974, S. 427 – 449.
- LENNÉ, H.: *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart: Klett 1969.
- MESCHKOWSKI, H.: *Die Bildung des Menschen durch die moderne Mathematik*. Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 1965, H. 2.
- THOM, R.: *Moderne Mathematik: Ein erzieherischer und philosophischer Irrtum?* In: M. OTTE: Mathematiker über Mathematik. Berlin/Heidelberg/Göttingen: Springer 1974, S. 371 – 390.
- TIETZ, H.: *Zur Didaktik der Mathematik*. ZDM 1974/3, S. 131 – 132.
- WALTHER, G.: *Operative Ansätze zu einer inhaltlichen Logik im Mathematikunterricht*. Dissertation, Pädagogische Hochschule Ruhr 1974.
- VON NEUMANN, J.: *Der Mathematiker*. In: M. OTTE: Mathematiker über Mathematik. Berlin/Heidelberg/Göttingen: Springer 1974, S. 29 – 46.
- WINTER, H.: *Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule*. In: Der Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.): Beiträge zum Lernzielproblem. Ratingen: Henn 1972.
- WITTMANN, E. CH.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1974.

¹ Leicht bearbeiteter Nachdruck aus Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 7 (1975), H. 3, S. 106 – 116.