

Die Schattenseiten des Alten und des Neuen soll man
erforschen, entwickeln, reformieren,
aber weder vorwärts noch rückwärts revolutionieren.
K. G. von Raumer

Die Arbeit im Projekt „mathe 2000“ ist von der Überzeugung ge-
tragen, dass die Reform des Mathematikunterrichts nur in einem
stetigen historischen Prozess gelingen kann. Auch bei der Ent-
wicklung des ZAHLENBUCHs wurde daher bewusst die bewährte
Praxis des Mathematikunterrichts der Grundschule aufgenom-
men und weitergeführt. Im Mittelpunkt des Werkes stehen die
zentralen Inhalte der Arithmetik (Einspluseins, Einmaleins, halb-
schriftliches Rechnen, schriftliche Rechenverfahren) und de-
ren Anwendungen auf das Sachrechnen, die nach wie vor den
Kern des Unterrichts ausmachen. Unter der Devise „Weniger ist
mehr“ wurde zurückgegriffen auf altbewährte Anschauungsmit-
tel (Wendeplättchen, Zwanzigerfeld, Hundertertafel, Stellentafel,
Zahlenstrahl), die durch passende Neuentwicklungen komplet-
tiert wurden (Wendekarten, Poster zum Einspluseins und Einmal-
eins, Tausenderbuch).
Die Ergebnisse der Hirnforschung zeigen, dass ein Teil unseres Ge-
hirns auf die Erkennung und Verarbeitung von Zeichen, insbeson-
dere von Zahlen, der andere auf die Erkennung und Verarbeitung
von Bildern spezialisiert ist. Um beide Teile zu aktivieren, wird im
ZAHLENBUCH die Geometrie von der Frühförderung an besonders
gepflegt. Sie bildet einen schlüssigen Lehrgang. Dies kommt auch
der Arithmetik und dem Sachrechnen zugute, denn in beiden
Bereichen werden geometrische Darstellungen vielfach benutzt
(Punktmuster, Zahlenstrahl, Diagramme, Situationsskizzen usw.)
Schon bei der ersten Ausgabe 1994/97, also lange vor den Bil-
dungsstandards, wurden in das ZAHLENBUCH auch die Elemente
neuer Inhaltsbereiche (Stochastik¹, Kombinatorik) aufgenommen
und organisch mit den klassischen Inhaltsbereichen verbunden.
In der betont *fachlichen Fundierung* und im *ganzheitlichen Zu-
gang zum Lernen* wurden im Projekt „mathe 2000“ und im ZAH-
LENBUCH neue Wege beschritten. Diese Wege sind insofern nicht
völlig neu, als sie von fortschrittlichen Mathematikdidaktikern
vorgezeichnet waren. Für ihre konsequente praktische Umset-
zung in der Breite ist das ZAHLENBUCH das Original.

Fachliche Fundierung: Mathematik als Wissenschaft von Mustern

Früher hat man die Mathematik einerseits als Werkzeug für vie-
le Berufsfelder und andererseits als systematisch geordnetes
Gebäude mathematischer Theorien unterrichtet und Lehren als
Wissensvermittlung verstanden. Heute wird die Mathematik als
lebendige „Wissenschaft von Mustern und Strukturen“ gesehen.²
Der Unterricht orientiert sich weniger an der fertigen Mathematik,
sondern mehr an den individuellen und sozialen *Prozessen*, die zu
mathematischem Wissen führen. Diese Prozesse verlaufen natur-
gemäß nicht glatt. Genauso wie mathematische Forscher müssen
sich auch die Lernenden ihren Weg zu Erkenntnissen erst bahnen.
Fehler sind dabei unvermeidlich. Aus ihnen in der Diskussion mit
anderen Lernenden Lehren zu ziehen, gehört zum Wesen des

Lernens. Im ZAHLENBUCH wird diesem aktiven und interaktiven
Wissenserwerb konsequent Raum gegeben (s. Kapitel 2).
Die betont mathematische Fundierung des Werkes resultiert
auch aus der Einsicht, dass die in mathematischen Mustern und
Strukturen konzentrierte Denkökonomie die beste Grundlage für
Verständnis bietet: *Mathematik lernt man nur durch Mathematik*.
Muster und Strukturen bieten aber lediglich einen Rahmen. Sie
legen die Lernprozesse nicht fest, sondern schaffen Spielräume,
die individuell genutzt werden können.

Ganzheitlicher Zugang: Lernen als Knüpfen von Wissensnetzen

Im Einklang mit der neuen Auffassung von Mathematik wird Ler-
nen heute nicht mehr als Bau einer Mauer nach einem vorge-
gebenen Plan unter strikter Vermeidung von Lücken verstanden,
sondern als fortlaufendes Knüpfen eines Netzes von Wissensele-
menten und Fertigkeiten. Lücken an einer Stelle sind keineswegs
ein Hindernis für den Ausbau eines Netzes an einer anderen Stel-
le. Sie werden im Laufe des Lernprozesses geschlossen, indem
über die Lücken hinweg „Wissensfäden“ gespannt und an den
schon festeren Teilen des Netzes verankert werden.

Der Natur des Lernens gemäß verlaufen Lernprozesse bei der
Auseinandersetzung mit einem Stoffgebiet individuell. Die Ler-
nenden kommen am besten voran, wenn sie eigene Wege gehen
und ihr Tempo selbst bestimmen dürfen. Nur dann können sie
auch ihr Vorwissen optimal einsetzen. Auch die Reihenfolge, in
der einzelne „Wissensfäden“ eingeknüpft werden, variiert indi-
viduell und darf auch variieren. Durch ein schlüssiges fachliches
Konzept sowie durch den sozialen Austausch mit der Lehrperson
und mit anderen Lernenden wird dafür gesorgt, dass trotz aller
individuellen Unterschiede während des Lernprozesses am Ende
gemeinsames Wissen vorhanden ist, über das die verschiedenen
Lernenden natürlich in unterschiedlicher Weise verfügen. Die
Anleitung zu eigenständigem Lernen bedeutet aber nicht, dass
die Lernenden sich selbst überlassen bleiben. Im Gegenteil: Die
Lehrperson spielt bei der Orientierung über die Lernaufgaben und
deren Strukturierung, bei der Besprechung und Erklärung von Lö-
sungswegen, bei der Vertiefung von Einsichten, der prägnanten
Zusammenfassung des Gelernten und der Herstellung von Quer-
beziehungen eine tragende Rolle. Diese Interventionen sind um
so effektiver, je mehr sie sich an der mathematischen Struktur
orientieren.

1. KONZENTRATION DES STOFFES AUF TRAGENDE GRUNDIDEEN

Ich vertrete zwei pädagogische Prinzipien:
1. Unterrichte nicht zu viele Gegenstände.
2. Behandle das, was du behandelst, gründlich.
A. N. Whitehead

Da die Unterrichtszeit begrenzt ist, muss der Stoff auf diejeni-
gen inhaltlichen Grundideen konzentriert werden, die für die
Umwelterschließung und für ein Verständnis der Fachstruktur
unerlässlich sind. Die auf S. 160/161 aufgelisteten Grundideen
der Arithmetik, Geometrie und Stochastik reichen weit über die
Grundschule hinaus, in die höhere Schulstufen hinein. In ihnen
sind „strukturelle“ und „praktische“ Aspekte aufeinander bezo-
gen. Dies entspricht dem Wesen der Mathematik als gleichzeitig
„reiner“ und „angewandter“ Wissenschaft: Mathematische Mus-
ter und Strukturen sind schön *und* nützlich.
Muster und Strukturen durchziehen alle Inhaltsbereiche. Dass sie
in den Bildungsstandards der KMK für die Grundschule als eige-
ner Inhaltsbereich ausgewiesen wurden, ist ein systematischer
Fehler, der im ZAHLENBUCH korrigiert wird.

Spiralige Entwicklung der Grundideen über die Stufen hinweg

Die mathematischen Grundideen der Inhaltsbereiche werden
nach dem Spiralprinzip entwickelt, d.h. der Unterricht greift sie
immer wieder auf, vertieft sie und führt sie in den folgenden Stuf-
en weiter. Die Kinder können so Schritt für Schritt in die Mathe-
matik hineinwachsen. Auf diese Weise wird nachhaltiges Lernen
gesichert.

Beispiel 1:
Die Idee „Zehnersystem“ wird im ZAHLENBUCH-Frühförder-
programm im „Zehnerfeld“, im ersten Band durch das „Zwan-
zigerfeld“, im zweiten durch die „Hundertertafel“ und das
„Hunderterfeld“, im dritten durch das „Tausenderbuch“ und
das „Tausenderfeld“ und im vierten durch das „Millionbuch“
repräsentiert.

Beispiel 2:
In der Stochastik begegnen die Kinder in der Frühförderung
dem Spielwürfel. Der erste Band des ZAHLENBUCHs enthält
einfache Zufallsexperimente (Plättchen werfen, Ziehen aus
einer Urne). Im zweiten Band wird die Augensumme beim
Doppelwürfel studiert und in Kontrast zum Würfeln mit einem
Würfel gesetzt. Im dritten Band wird der Mittelwert eingeführt
und im vierten Band vertieft.

Beispiel 3:
Die geometrische Grundidee „Formen zusammensetzen“ wird
in der Frühförderung in Form eines Legespiels mit halben Qua-
draten und Rauten angebahnt und in den ersten beiden Bän-
den im Legespiel „Tangram“ weiterverfolgt. Im dritten Band
setzen die Kinder Quadrate zu Fünflingen und Würfelnetzen
und vierten Band regelmäßige Vielecke zu den Platonischen
Körpern zusammen.

Inhaltliche und allgemeine Lernziele (Kompetenzen)
Bei der Zielsetzung des Mathematikunterrichts sind zwei Ebenen
zu unterscheiden:
– *inhaltliche* Lernziele (inhaltsbezogene Kompetenzen)
– *allgemeine* Lernziele (allgemeine Kompetenzen)

- Inhaltliche Lernziele beschreiben Kenntnisse und Fertigkeiten,
z.B. das Einspluseins, das Einmaleins, die schriftlichen Rechen-
verfahren, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal oder die Umrech-
nung von Größeneinheiten. Allgemeine Lernziele beschreiben
den mathematischen Erkenntnisprozess und sind daher für das
Mathematiklernen von der Grundschule bis zur Universität maß-
geblich. Heinrich Winter gebührt das Verdienst, sie bereits 1975
mustergültig formuliert zu haben. Seine Liste lautet in etwas an-
derer Formulierung wie folgt:
1. *Mathematisieren*, d.h. reale Situationen in die Sprache der Ma-
thematik übersetzen, mit Mitteln der Mathematik Lösungen
bestimmen und das Ergebnis für die reale Situation interpre-
tieren
 2. *Explorieren*, d.h. Situationen probierend erforschen, Beziehun-
gen und Strukturen entdecken, Strukturen erfinden, kreative
Ideen entwickeln
 3. *Argumentieren*, d.h. mathematische Sachverhalte und Lö-
sungswege erklären und begründen
 4. *Formulieren*, d.h. mathematische Sachverhalte und Lösungs-
wege mündlich und schriftlich beschreiben

Um die seit Jahrhunderten bewährte *inhaltliche* Orientierung zu
bewahren, die für einen fachlich fundierten Unterricht absolut
notwendig ist, werden im ZAHLENBUCH die „inhaltsbezogenen
mathematischen Kompetenzen“ der Bildungsstandards als „in-
haltliche Lernziele“ und die „allgemeinen mathematischen Kom-
petenzen“ als „allgemeine Lernziele“ verstanden. Da bereits in
der Originalausgabe 1994/97 inhaltliche und allgemeine Lern-
ziele ausgewiesen und in produktiven Übungen miteinander ver-
zahnt wurden, war das ZAHLENBUCH auch in diesem Punkt seiner
Zeit weit voraus.³

Inhaltliche Lernziele (Kompetenzen) schaffen eine gute Basis für
die Förderung allgemeiner Lernziele (Kompetenzen) und umge-
kehrt. Insofern bedingt jede Lernzielkategorie die andere. Für die
praktische Arbeit muss aber ein wichtiger Unterschied im Auge
behalten werden: während sich bei inhaltlichen Lernzielen vor-
zeigbare Erfolge in einem begrenzten Zeitraum erzielen lassen,
stellen sich Fortschritte bei den allgemeinen Lernzielen nur lang-
fristig und nur dann ein, wenn mit Geduld und Beharrlichkeit
an ihnen gearbeitet wird. Dies ist besonders wichtig, wenn die
Eingangsvoraussetzungen der Kinder im Entdecken, Beschreiben
und Begründen von Mustern und Strukturen sehr niedrig sind,
was in einem ungünstigen Umfeld häufig vorkommt.

¹ Stochastik (gr.) ist eine zusammenfassende Bezeichnung für Wahr-
scheinlichkeits- und Statistik.
² s. dazu Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2004): Muster und Strukturen als
Grundkonzept. In: Walther, G. et al.: Bildungsstandards konkret. Berlin:
Cornelsen Scriptor 2007, 42–65.

³ Die Autoren des ZAHLENBUCHs widersprechen ganz entschieden der
Behauptung „Kompetenzen“ würden eine präzisere Beschreibung und mit-
hilfe von Kompetenzmodellen auch eine bessere „Messung“ des „Outputs“
ermöglichen als die früheren Lernziele. Sie betrachten die inhaltsleeren
Kompetenzmodelle vielmehr als die „Mengenlehre der Bildungsforscher“

Grundideen der Arithmetik	Grundideen der Geometrie
1. Zahlreihe Die natürlichen Zahlen bilden eine Reihe (<i>ordinaler Aspekt</i>). Beim Zählen der Elemente einer Menge werden Abschnitte davon durchlaufen. Die letzte Zahl gibt die Anzahl der Elemente an (<i>kardinaler Aspekt</i>).	1. Formen und ihre Konstruktion Der dreidimensionale Anschauungsraum wird von Formgebilden unterschiedlicher Dimension bevölkert (Punkte, Linien, Flächen und Körper), die sich auf vielfältige Weise konstruktiv erzeugen lassen.
2. Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile Mit den natürlichen Zahlen kann man nach bestimmten Gesetzen mündlich, halbschriftlich und schriftlich vorteilhaft rechnen. Der Zahlbereich wird später unter Beibehaltung der Rechengesetze durch Bruchzahlen und negative Zahlen erweitert.	2. Operieren mit Formen Geometrische Gebilde lassen sich bewegen (verschieben, drehen, spiegeln...), verkleinern, vergrößern, zerlegen, überlagern..., wodurch Beziehungen hergestellt werden.
3. Zehnersystem Das Zahlssystem ist dekadisch gegliedert, wobei sich die Tausenderstruktur periodisch wiederholt. Außerdem ist der Zehner in zwei Fünfer gegliedert.	3. Koordinaten Zur Lagebeschreibung von Punkten können auf Linien, Flächen und im Raum Koordinatensysteme eingeführt werden, welche die Grundlage für die analytische Geometrie und für die graphische Darstellung von Funktionen bilden.
4. Rechenverfahren Schriftliche Rechenverfahren führen das Rechnen mit Zahlen auf das Rechnen mit einstelligen Zahlen zurück (Ziffernrechnen). Diese Verfahren sind automatisierbar und können von Maschinen (z.B. Taschenrechnern) ausgeführt werden.	4. Maße und Formeln Längen, Flächen, Volumina und Winkel lassen sich nach Vorgabe von Maßeinheiten messen. Aus vorgegebenen Maßen lassen sich andere nach verschiedenen Formeln berechnen (z.B. Inhaltsformeln).
5. Arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster Mit Zahlen kann man aufgrund bestimmter Eigenschaften und Beziehungen Gesetzmäßigkeiten, Formeln, Muster („Strukturen“) erzeugen, deren tiefere Zusammenhänge in arithmetischen Theorien systematisch entwickelt werden (Zahlentheorie, Kombinatorik).	5. Geometrische Gesetzmäßigkeiten und Muster Geometrische Gebilde und ihre Maße können in vielfältiger Weise in Beziehung gesetzt werden, sodass Gesetzmäßigkeiten und Muster („Strukturen“) entstehen, deren tiefere Zusammenhänge in geometrischen Theorien systematisch entwickelt werden (euklidische Geometrie der Ebene und des Raumes, kombinatorische Geometrie usw.).
6. Zahlen in der Umwelt Zahlen lassen sich vielfältig verwenden als Anzahlen, Ordnungszahlen, Maßzahlen, Operatoren und Codes.	6. Formen in der Umwelt Reale Gegenstände können durch geometrische Begriffe (angenähert) beschrieben werden. Die Technik stellt Verfahren zur Herstellung geometrischer Formen bereit, die bestimmten Zwecken genügen. Künstler setzen geometrische Formen für ästhetische Zwecke ein.
7. Übersetzung in die Zahl- und Formensprache Reale Problemstellungen lassen sich mithilfe arithmetischer und geometrischer Begriffe in die Zahlen- und Formensprache übersetzen („modellieren“). Mithilfe arithmetischer und geometrischer Verfahren werden daraus „theoretische“ Lösungen gewonnen, aus denen praktische Folgerungen gezogen werden können.	

Grundideen der Stochastik
1. Quantitative Beschreibung des Zufalls Die Chance (Wahrscheinlichkeit) für das Auftreten eines zufälligen Ereignisses und oder einer Zufallsgröße wird durch eine Zahl zwischen 0 (= 0 %) und 1 (= 100%) bewertet.
2. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten Mit den Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ausfälle eines Zufallsereignisses sowie mit den schwankenden Werten von Zufallsgrößen kann man nach bestimmten Regeln rechnen (Wahrscheinlichkeitsräume, Erwartungswerte, Mittelwerte, Korrelationen, bedingte Wahrscheinlichkeiten).
3. Grundlegende Zufallsexperimente Der Münzwurf, der Wurf mit dem einfachen Würfel und dem Doppelwürfel sowie das Ziehen aus einer Urne (mit und ohne Zurücklegen) haben sowohl für die Modellbildung wie auch die Theoriebildung grundlegende Bedeutung.
4. Formeln Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und stochastischen Werten gibt es Formeln, zu deren Herleitung die Kombinatorik wichtige Hilfsmittel bereitstellt (Laplacescher Wahrscheinlichkeitsbegriff).
5. Stochastische Gesetzmäßigkeiten und Muster Wenn Wahrscheinlichkeiten in Beziehung gesetzt werden, ergeben sich stochastische Gesetzmäßigkeiten und Muster, deren tiefere Zusammenhänge in stochastischen Theorien systematisch untersucht werden (z.B. Gesetz der großen Zahl, Normalverteilung).
6. Zufall in der Umwelt Zufällige Ereignisse in der Umwelt können nach Chancen bewertet werden (Wetterprognosen, Gewinnchancen).
7. Stochastische Modellbildung Zufällige Erscheinungen können einerseits simuliert, andererseits mithilfe stochastischer Methoden mathematisch erfasst werden, wodurch Prognosen ermöglicht und statistische Zusammenhänge aufgedeckt werden (Hypothesentests, Hochrechnungen).

Sparsamkeit in Arbeitsmitteln und bildlichen Darstellungen: Weniger ist mehr

Anschauungs- und Arbeitsmittel wirken weder unmittelbar noch eindeutig. Vielmehr müssen sich die Kinder erst in sie einarbeiten. Dies erfordert Zeit. Angesichts des engen Zeitrahmens verbietet es sich daher, eine große Zahl von Materialien heranzuziehen. Im ZAHLENBUCH wurde das Problem der Auswahl von Demonstrations- und Anschauungsmitteln auf folgende Weise gelöst: genau die Materialien wurden ausgewählt, welche die mathematischen Grundideen am besten verkörpern. Ihr ständiger Gebrauch schafft die besten Voraussetzungen dafür, dass Darstellungen in Vorstellungen übergehen und eine Grundlage für mentale Operationen bilden. Aus dem gleichen Grund werden im ZAHLENBUCH auch bildliche und symbolische Darstellungen sowie Sprechweisen und Fachausdrücke auf diejenigen beschränkt, die weiterführende Bedeutung haben. Besondere Aufmerksamkeit erfahren dabei grundlegende Datenstrukturen (Tabellen, Listen, Diagramme und Rechenpläne).

Richtige Nutzung der Darstellungsformen

Vom Standpunkt des aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens sind konkrete Materialien sowie bildliche und symbolische Darstellungen nicht als Hilfsmittel der Belehrung, sondern als Hilfen für das Lernen in der Hand der Kinder aufzufassen. Das ZAHLENBUCH verbindet die Nutzung konkreter Materialien („enaktiv“), zeichnerischer Darstellungen („ikonisch“) und formaler Darstellungen („symbolisch“) mit der ganzheitlichen Behandlung von Rahmenthemen. Ein zu früher Übergang zum formalen Rechnen ist Gift für das Verständnis und wird im ZAHLENBUCH vermieden.

Beispiel:
Der gesamte Zwanzigerraum wird zuerst mit Material „unterfüttert“. Die Kinder benutzen bei ihren Rechnungen zwanglos Material und bildliche Darstellungen. Auf diesem Boden können sich formale Schreibweisen in Ruhe entwickeln („Prinzip der fortschreitenden Schematisierung“).

Auf zwei Punkte muss dabei besonders geachtet werden:

- Mit der Einführung formaler Darstellungen verlieren Arbeitsmittel und Bilder keineswegs ihre Bedeutung. Sie werden immer benötigt, wenn es um das Verstehen, Beschreiben und Mitteilen von Lösungswegen, das Aufzeigen von Beziehungen zwischen Aufgaben und Lösungen, das Lösen kombinatorischer Aufgaben oder um die Modellierung von Sachsituationen geht. Den Kindern wird diese Botschaft am besten dadurch übermittelt, dass die Lehrperson Arbeitsmittel im Unterricht selbst mit der größten Selbstverständlichkeit verwendet. Auf diese Weise lässt sich auch das unter Kindern (und Eltern!) verbreitete Vorurteil am wirkungsvollsten ausräumen, die Verwendung von Plättchen sei ein Zeichen für mangelnde Rechenkompetenz. Letztendlich muss aber jedem Kind die Freiheit zugestanden werden, die verschiedenen Darstellungsmittel individuell zu nutzen.
- Der handelnde („operative“) Umgang mit Mathematik ist keineswegs nur auf „enaktive“ Darstellungen beschränkt, sondern schließt „ikonische“ und „symbolische“ Darstellungen ein. Auch an bildlichen Darstellungen (z.B. der Zahlenreihe)

oder an symbolischen Darstellungen (z. B. Rechensätzen) kann man operieren. Im ZAHLENBUCH wird dieser operative Zugang, den Arnold Fricke angeregt durch Jean Piaget und Hans Aebli eröffnet hat, besonders gepflegt.

Abschließend zu diesem Abschnitt sei angemerkt, dass die beschränkt zur Verfügung stehende Unterrichtszeit nicht nur zu einer Konzentration auf Grundideen und Basiskompetenzen, sondern auch zur Disziplin bei der Behandlung und Auswahl von Themen zwingt. Man muss sich im Klaren sein, dass jede Ausweitung eines Themas und jedes zusätzliche Thema die Zeit reduziert, die für andere Themen verfügbar ist. Diese schlichte Tatsache darf auch bei noch so verlockend ausgearbeiteten Unterrichtsvorschlägen nicht vergessen werden. Bei der Entwicklung des ZAHLENBUCHs wurde im Lauf der Zeit immer bewusster auf ein ausgewogenes Zeitmanagement geachtet. Auf die bei der ersten Fassung eingeführte unverbindliche Rubrik „Wie könnte es weitergehen?“ wird heute verzichtet.

2. AKTIV-ENTDECKENDES UND SOZIALES LERNEN

Nicht Leitung und Rezeptivität, sondern Organisation und Aktivität ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet.
Johannes Kühnel: Neubau des Rechenunterrichts, 1916

Das für die Konzeption zentrale didaktische Prinzip des aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens gründet sich auf aktivistische Lerntheorien, insbesondere die genetische Psychologie des Schweizer Psychologen Jean Piaget (1896 – 1980), ist aber auch fundamental mit der Mathematik verbunden. Heinrich Winter hat dieses Prinzip 1985 prägnant formuliert:

Den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts wird in besonderem Maße eine Konzeption gerecht, in der das Mathematiklernen als ein konstruktiver, entdeckender Prozess aufgefasst wird. Der Unterricht muss daher so gestaltet werden, dass die Kinder möglichst viele Gelegenheiten zum selbsttätigen Lernen in allen Phasen eines Lernprozesses erhalten. Die Aufgabe des Lehrers besteht darin, herausfordernde Anlässe zu finden und anzubieten, ergiebige Arbeitsmittel und produktive Übungsformen bereitzustellen und vor allem eine Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen aller Kinder förderlich ist.

Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen verlangt eine ständige Durchdringung inhaltlicher und allgemeiner Lernziele und lässt sich daher nicht in einem kleinschrittigen Unterricht verwirklichen, in dem der Stoff Häppchen für Häppchen vermittelt wird und die Lösungswege sowie die äußere Form der Lösung anhand von Musteraufgaben festgelegt sind. Sinnvoll ist vielmehr eine ganzheitliche Behandlung von Rahmenthemen, z.B. des Einspluseins und des Einmaleins.

Ganzheitliche Behandlung von Rahmenthemen in mehreren Durchgängen

Namentlich im ersten und zweiten Band gibt es Rahmenthemen, die in mehreren Durchgängen erarbeitet werden müssen. Die ersten Durchgänge dienen der Orientierung und Einführung, die weiteren der Übung, Vertiefung und Ergänzung. Bei arithmetischen Rahmenthemen steht am Schluss immer die Automatisierung. Jedes Kind kann bei diesem Vorgehen an seine individuellen Voraussetzungen anknüpfen und hat genügend Zeit, um sein Wissensnetz von Durchgang zu Durchgang zu erweitern und zu festigen. Wie eingangs schon angemerkt, sind Lücken bei einem Durchgang kein Hindernis für sinnvolles Lernen im nächsten Durchgang. Da der Lernprozess die Lernziele immer wieder neu und von einer anderen Seite aus ansteuert, gibt es für die Kinder genügend Möglichkeiten, um ihre Lücken allmählich zu schließen. Es besteht kein Grund zur Sorge, dass Kinder „abgehängt“ werden.

Beispiel 1:
Einspluseins (Band 1)
1. Durchgang: Einführung der Addition am Zwanzigerfeld (Seiten 49 – 57)
2. Durchgang: Einführung der Subtraktion am Zwanzigerfeld unter Bezug auf die Addition (Seiten 58 – 65)
3. Durchgang: Verzahnung von Addition und Subtraktion (Seiten 70 – 75.)

4. Durchgang: Vertiefung des Einspluseins an der Einspluseins-Tafel (Seiten 86 – 93)
5. Durchgang: Weitere produktive Übungen (Seiten 106 – 107, Seiten 112 – 123)
6. Durchgang (parallel zu den Durchgängen 3 – 4): Automatisierung im Blitzrechenkurs

Beispiel 2:
Orientierung im Hunderterraum (Band 2)
1. Durchgang: Hunderterfeld (Seiten 17 – 19)
2. Durchgang: Hundertertafel (Seiten 20 – 21)
3. Durchgang: Hunderterreihe (Seiten 22 – 25)
4. Durchgang: Nochmals Hunderterfeld (Seiten 32 – 33)
5. Durchgang: Automatisierung (Blitzrechenübungen „Welche Zahl?“, „Ergänzen zum nächsten Zehner“, „Ergänzen bis 100“, „100 teilen“)

Der ganzheitliche Zugang unterscheidet sich grundlegend vom traditionellen Zugang. Für Lehrerinnen und Lehrer, die zum ersten Mal nach dem neuen Konzept unterrichten, kostet es daher Mut und Überwindung, trotz anscheinender Lücken bei einigen Kindern im Unterricht weiterzugehen, wie es das neue Konzept verlangt. Wenn dieser Mut nicht aufgebracht wird, sind Schwierigkeiten vorprogrammiert und der Erfolg wird beeinträchtigt: Ganzheitliche Themen sperren sich gegen eine kleinschrittige Behandlung.

Vorteile der ganzheitlichen Behandlung

Lernen in Ganzheiten ist für die Kinder nicht etwa schwerer, sondern leichter, wie die englische Psychologin Margaret Donaldson festgestellt hat:

Es scheint eine weit verbreitete Meinung zu sein, man dürfe Kinder anfangs nicht mit der Komplexität eines Stoffgebietes konfrontieren, da sie komplizierte Sachverhalte unmöglich bewältigen könnten. Ich teile diese Ansicht nicht. Die Ursache für diesen Irrtum liegt m. E. darin, dass zwei grundverschiedene Dinge nicht auseinander gehalten werden, nämlich eine ganzheitliche, grobe Übersicht über das Stoffgebiet einerseits und die Beherrschung aller seiner Einzelheiten andererseits. Die Kinder benötigen natürlich geraume Zeit, um alle möglichen Einzelheiten zu lernen. Es ist aber keine Frage, dass ihnen das leichter fällt, wenn sie über die Gesamtheit der anstehenden Lernaufgaben richtig vorinformiert sind.

Durch die ganzheitlichen Zugänge zu Rahmenthemen wird das bewährte Prinzip „Vom Leichten zum Schweren“ keinesfalls aufgehoben. Es wird nur anders realisiert als traditionell üblich. Beim Einspluseins z.B. sind nicht nur die Aufgaben im Fünferraum leicht, sondern auch Aufgaben mit einem Summanden 1, Aufgaben mit einem Summanden 5, Aufgaben mit dem Ergebnis 10 und Verdopplungsaufgaben. Es ist daher sehr sinnvoll, solche Aufgaben als erste Fäden des Netzes „Einspluseins“ zu spannen und andere Aufgaben daran anzuknüpfen. Lernen in Ganzheiten trägt auch ganz wesentlich zur Zieltransparenz bei: die Kinder können sich schon während des Lernprozesses klar machen, was sie schon können, wo sie noch Schwierigkeiten haben und was sie noch lernen müssen. Der ganzheitliche Zugang wird dadurch unterstützt, dass grundsätzlich nur Arbeitsmittel verwendet werden, die eine Gesamt-

übersicht über die Aufgaben ermöglichen. Beim Einspluseins z. B. sind dies das Zwanzigerfeld und die Einspluseins-Tafel, beim Einmaleins das Hunderterfeld mit Malwinkel, der Einmaleins-Plan und die Einmaleins-Tafel.

Bei ganzheitlichen Zugängen sind Pläne, bei denen der Stoff auf Wochen oder sogar Stunden verteilt wird, nicht nötig. Eine grobe Verteilung über Monate ist zweckdienlicher. Der Grund liegt darin, dass sich die Basiskompetenzen, die entscheidend für nachhaltige Lernerfolge sind, gar nicht bestimmten Wochen zuteilen lassen. Sie sind in Form besonderer Kurse ausgewiesen, die den Unterricht **ständig** begleiten müssen, siehe dazu besonders die Ausführungen zum Blitzrechnenkurs auf den Seiten 163 – 164.

Zone der nächsten Entwicklung

Ganzheitliche Themen weisen über sich hinaus und verlocken zu Grenzüberschreitungen. Z.B. werden die Kinder vom Einspluseins ausgehend auch über 20 hinaus rechnen wollen. Dies ist zugelassen und sogar erwünscht. Wie der russische Psychologe Vygotskij in seiner kritischen Auseinandersetzung mit Piaget überzeugend dargelegt hat, muss der Unterricht stets die „Zone der nächsten Entwicklung“ anpeilen. Dies bedeutet aber nicht, dass Grenzüberschreitungen eigens thematisiert werden müssten. Es genügt, sie als Denkanstöße wirken zu lassen. Wichtig ist, dass keine Abschottung im Sinne von „Das dürft ihr noch nicht rechnen!“ vorgenommen wird.

Ein typisches Beispiel für die „Zone der nächsten Entwicklung“ ist der Blick auf den Hunderterraum im Band 1, Seiten 26 – 27, der im Weiteren anhand der kleinen Hunderterfelder an den Seitenzahlen wach gehalten wird.

Anleitung zum selbstständigen und eigenverantwortlichen Umgang mit dem ZAHLENBUCH

Grundvoraussetzung für lebenslanges Lernen ist die Fähigkeit, Texte eigenständig erschließen zu können. Auch im Mathematikunterricht muss diese Fähigkeit gefördert werden. Nicht nur bei der Besprechung von Themenblöcken sollten die Kinder versuchen, sich so weit wie möglich selbst ein Bild von den Lernaufgaben zu machen. Auch bei einzelnen Seite oder Doppelseiten des ZAHLENBUCHs sollte die Lehrperson bei der Vorbesprechung typischer Beispiele und der anschließenden Bearbeitung der Seite die Kinder selbst überlegen lassen, worum es im einzelnen geht, und sich auf Verständnishilfen beschränken, z.B. die Vorgabe konventioneller Sprechweisen, Schreibweisen und zeichnerischer Darstellungen. Je weiter die Lesefähigkeit entwickelt ist, desto mehr sollten die Kinder versuchen, sich neue Aufgaben *alleine* zu erschließen. Im Klassengespräch können die verbleibenden Unklarheiten anschließend beseitigt werden. Das ZAHLENBUCH unterstützt diese aktive Sinnkonstruktion. Im Interesse des selbstständigen Arbeitens sollte auch das Auffinden und Aufschreiben von Lösungen im Rahmen der fachlichen Vorgaben den Kindern überlassen werden.

Aus diesen Überlegungen geht hervor, dass mit der Förderung der Eigenaktivität auch die Eigenverantwortung der Kinder für ihr Lernen gestärkt werden muss.

Einrichtung von Kleingruppen

Zur Unterstützung des selbstständigen Arbeitens wird eine Organisationsform empfohlen, die in Japan vielfach praktiziert wird und sich dort bewährt hat: die Einrichtung von Kleingruppen. Die Organisation solcher Gruppen erfordert einen bestimmten Auf-

wand, lohnt sich aber. In der japanischen Gesellschaft spielt die solidarisch arbeitende Gruppe eine Schlüsselrolle. Der Grundgedanke ist aber auch dem westlichen Denken keineswegs fremd. Er findet sich z.B. im Subsidiaritätsprinzip einiger Soziallehren, das folgendermaßen lautet: Jede soziale Gruppe soll die Aufgaben, die sie selbst bewältigen kann, in eigener Regie bearbeiten, und nur dann Hilfe von einer höheren Ebene anfordern, wenn die eigenen Kräfte nicht ausreichen. Auf eine Schulklasse übertragen bedeutet dieses Prinzip, dass zwischen dem einzelnen Kind und der Lehrperson als Zwischenebene Kleingruppen mit 3 bis 5 Kindern eingeschoben werden. Die Kinder jeder Gruppe sollen sich gegenseitig beim Aufbau von Verständnis unterstützen, natürlich ohne einander die Arbeit abzunehmen. Auf diese Weise wird auch die Verantwortung für das soziale Lernen gefördert. Es ist weder notwendig noch sinnvoll, leistungshomogene Gruppen zu bilden. Die Befürchtung, dass stärkere Kinder durch schwächere Kinder „gebremst“ würden, besteht nicht. Gerade im Austausch mit schwächeren Kindern werden sie angeregt, den Stoff noch tiefer zu durchdringen und ihre kommunikativen Fähigkeiten weiterzuentwickeln. In Japan werden die Gruppen im Laufe eines Schuljahrs z.T. mehrfach neu gemischt, was sinnvoll erscheint.

Für einige Aufgabenstellungen des ZAHLENBUCHs sind Kleingruppen eine ausgesprochene Hilfe.

Beispiel 1:
Blitzrechnen
Die Kinder stellen sich Aufgaben und kontrollieren sich gegenseitig.

Beispiel 2:
Mathekonferenzen
Die Kinder erklären einander ihre Rechen- und Lösungswege.

Der möglichst selbstständige Umgang der einzelnen Kinder und der Kleingruppen mit dem Buch wird durch Lösungsbände zum Schülerbuch und Arbeitsheft unterstützt. Die Hefte der Reihe „Probieren und Kombinieren“ enthalten Lösungsblätter.

Der Umgang mit Fehlern

Im belehrenden Unterricht wird angestrebt, die Lernenden zur fehlerlosen Reproduktion von vorgegebenen Verfahren zu führen. Von diesem Standpunkt aus ist eine möglichst genaue Beobachtung der Lernfortschritte des einzelnen Kindes gemessen an den Vorgaben wünschenswert, damit Fehler möglichst schnell „diagnostiziert“ und „ausgemerzt“ werden können. Entsprechend sind möglichst wirksame Rezepte zur „Fehlertherapie“ gefragt. Die jahrhundertelangen Erfahrungen mit dem belehrenden Unterricht zeigen, dass dieser Weg, so verlockend er scheint, nicht zum Ziel führt. „Von außen“ kommt man dem Lernprozess und den dabei auftretenden Fehlern nicht bei, ganz abgesehen davon, dass es für die Lehrerin in einer Klasse mit 20 bis 30 Kindern gar nicht möglich ist, den Lernprozess jedes einzelnen Kindes genau zu verfolgen.

Im aktiv-entdeckenden Unterricht wird mit Fehlern anders umgegangen: Die Kinder erhalten zuerst einmal Zeit, um sich selbst an neuen Aufgaben zu versuchen, alleine oder im Austausch mit anderen Kindern. Auf diese Weise können sie die notwendige Verbindung zu ihrem Vorwissen am besten herstellen. Bei diesen

ersten Versuchen werden auch Fehler auftreten, denn es gehört zum Wesen des Lernens, Fehler zu machen. Die Kinder brauchen natürlich eine Rückmeldung zu Fehlern, die sie selbst nicht erkennen. Rezepte zur Fehlervermeidung gehen aber am Problem vorbei. Die Rückmeldung muss in erster Linie auf die Herstellung eines Verständniszusammenhangs abzielen. Damit werden die Kinder besser befähigt, von sich aus Fehler zu vermeiden, als durch von außen mitgeteilte Rezepte zur Fehlervermeidung, deren blinde Befolgung selbst eine Fehlerquelle ist.

Notwendigkeit eines fachlichen Rahmens

Zu welchen Leistungen Kinder bei der Erarbeitung eigener Lösungswege fähig sind, wurde empirisch in eindrucksvoller Weise nachgewiesen. Aus diesen Befunden darf aber nicht gefolgert werden, Kinder könnten „sich“ die Mathematik am besten „alleine“ erarbeiten und würden darin durch Fachstrukturen nur behindert. Der amerikanische Bildungsphilosoph und Pädagoge John Dewey (1859 – 1952) hat diesen Irrtum schon vor über 100 Jahren entlarvt:

Reformpädagogen erwarten vom Kind, dass es Erkenntnisse aus seinem eigenen Geist heraus „entwickelt“ und für sich ausarbeitet, ohne „fachliche Rahmenbedingungen“ zu benötigen. Aus dem Nichts kann aber nichts entstehen. Entwicklung heißt nicht, dass dem kindlichen Geist irgendetwas entspringt, sondern dass substanzielle Fortschritte gemacht werden, und das ist nur möglich, wenn eine geeignete fachliche Umgebung zur Verfügung steht. Die Kinder müssen zwar von sich aus arbeiten, aber wie sie arbeiten, wird fast ganz von der Lernumgebung und dem Stoff, mit dem sie sich befassen, abhängen.

Auch Tendenzen zu einer übertriebenen Individualisierung, wie sie auch heute wieder zu beobachten sind, hat Dewey eine entschiedene Absage erteilt:

Die Befürworter individueller Lernprozesse argumentieren oft folgendermaßen: Gebt den Kindern gewisse Materialien, Werkzeuge, Hilfsmittel und lasst sie damit nach ihren ganz individuellen Wünschen umgehen und sich frei entwickeln. Setzt den Kindern keine Ziele, gebt ihnen keine Verfahren vor. Sagt ihnen nicht, was sie tun sollen. All dies wäre ein ungerechtfertigter Eingriff in ihre heilige Individualität, denn das Wesen der Individualität ist es, gerade sich selbst die Zwecke und die Ziele zu bestimmen. Ein solcher Standpunkt ist töricht. Denn wenn man ihn einnimmt, versucht man etwas Unmögliches, was immer töricht ist, und man missversteht die Bedingungen für selbstständiges Denken. Es gibt viele Möglichkeiten offene Angebote wahrzunehmen und irgendetwas zu machen, und es ist so gut wie sicher, dass diese eigenen Versuche ohne Anleitung erfahrener Lehrer zufällig, sporadisch und ineffektiv sein werden. Niemand würde bezweifeln, dass die persönliche Entwicklung in irgendeinem Lebensbereich durch die Nutzung der von anderen gesammelten Erfahrungen gefördert wird. Niemand würde z.B. ernsthaft vorschlagen, die Ausbildung von Schreinerlehrlingen solle beim Nullpunkt beginnen, d. h. ohne dass dem Lehrling Wissen über Mechanik, den Gebrauch von Werkzeugen, die Kenntnis von Materialien usw. vermittelt wird. Niemand käme auch auf die Idee, dass ein Schreinermeister, wenn er seinem Lehrling dieses Wissen vermittelt, den persönlichen Stil des Lehrlings einengen und seine individuelle Entwicklung behindern würde. Ein Erzieher und ein Lehrer haben dasselbe Recht und

dieselbe Pflicht, die Kinder anzuleiten wie ein Handwerksmeister seine Lehrlinge.

Der Erfolg des Mathematikunterrichts von der Grundschule bis zum Abitur steht und fällt damit, dass das Prinzip des aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens organisch mit fachlichen Grundideen und allgemeinen Lernzielen verbunden wird. Wenn die Kinder in der Mathematik wirklich weiterkommen wollen, dürfen sie nicht bei ihren privaten Sichtweisen und Denkwegen stehen bleiben, sondern müssen sich in die bewährten Fachstrukturen einarbeiten und diese gemäß der *im Fach liegenden Offenheit* produktiv nutzen. Diese Aneignung wird durch eine schlüssige fachliche Strukturierung der Lernangebote, wie sie das ZAHLENBUCH verkörpert, wesentlich unterstützt. Die Kinder gelangen insbesondere nicht von sich aus zu einem Verständnis typisch „theoretischer“ Aspekte der Mathematik (z.B. der Erfassung der Allgemeingültigkeit von Rechengesetzen, der Abstraktheit von Begriffen oder der zwingenden Logik einer mathematischen Argumentation), sondern müssen im Unterricht dazu angeregt werden. Ziel des Unterrichts kann es nicht sein, dass jedes Kind seine „private Mathematik“ entwickelt, sondern dass es die Werkzeuge, die sich als effektiv erwiesen haben, individuell nutzt. Auch der einzelne mathematische Forscher erfindet nicht seine eigene Welt, sondern arbeitet eingebettet in das soziale Netzwerk der Wissenschaft Mathematik.

Entwicklung von Bewusstheit („Metakognition“)

Eine dem Lernen übergeordnete wichtige Aufgabe der Lehrperson besteht darin, die Kinder anzuregen, Besonderheiten der Mathematik wahrzunehmen, ihre Lernprozesse selbst zu steuern und Verantwortung für ihre Lernfortschritte zu übernehmen. Man muss mit den Kindern z.B. über die grundsätzliche Freiheit von Rechenwegen, über Schwierigkeiten beim Lernen und ihre Überwindung, über den Nutzen der Zusammenarbeit, über den Sinn des Blitzrechnens, usw. sprechen. Die Entwicklung von Bewusstheit verlangt Geduld und Beharrlichkeit, weil sich der Erfolg bei der Mehrheit der Kinder naturgemäß nur langfristig einstellt. Je mehr Bewusstheit die Kinder aber entwickeln und je mehr sie sich für ihr Lernen verantwortlich fühlen, desto mehr werden Lehrer entlastet. Insofern liegt es in deren ureigenem Interesse, die Bewusstheit der Kinder für ihr Lernen zu fördern.

3. GRUNDLEGENDES, AUTOMATISIERENDES UND PRODUKTIVES ÜBEN

Insgesamt lässt sich somit die These vertreten, dass Ziel und Organisation des Übens im Rahmen eines Konzepts des Lernens durch gelenkte Entdeckung weitaus besser aufgehoben sind als im ... Konzept des belehrenden Unterrichts, insofern entdeckend geübt und ühend entdeckt wird.

Heinrich Winter: Begriff und Bedeutung des Übens

Den weitaus größten Teil des Unterrichts muss aus guten Gründen das Üben einnehmen. Aus diesem Grund ist auch das ZAHLENBUCH überwiegend ein Übungsbuch. Im Hinblick auf die Breite der heutigen Zielsetzungen des Unterrichts sind aber verschiedene Übungstypen erforderlich.

Grundlegendes Üben

Wenn ein Thema neu eingeführt wird, sind grundlegende Übungen angebracht, die dazu dienen, die neuen Aufgabenstellungen und Lösungswege zusammen mit neuen Sprechweisen anhand geeigneter Materialien handlungsorientiert zu erarbeiten. Dabei muss das neue Wissen mit bekanntem Wissen verknüpft werden. Die Qualität der Bearbeitung von Aufgaben, die exemplarische Bedeutung haben, ist in dieser Phase wichtiger als die Quantität der behandelten Aufgaben.

Beispiel 1:
Einführung der Subtraktion (Band 1, Seiten 58–64)
Zuerst wird am Zwanzigerfeld besprochen, was „minus“ überhaupt bedeutet. Die Handlungsanleitung „Lege ..., nimm ... weg“ ist dabei von zentraler Bedeutung. Nach einer Seite „Rechenwege“ folgen dann drei typische Seiten mit grundlegenden Übungen. Auf der ersten werden einfache Minusaufgaben gesondert betrachtet, wobei auf einfache Plusaufgaben zurückgegriffen wird. Auf der zweiten und dritten Seite wird an einer Reihe von Übungen besprochen, wie schwierigere Aufgaben auf die einfachen Aufgaben zurückgeführt werden können.

Beispiel 2:
Einführung des Tausenderraums (Band 3, Seiten 30–41)
Grundlegende Materialien sind hier das Tausenderfeld als Fortsetzung des Hunderterfelds und das Tausenderbuch als Fortsetzung der Hundertertafel. Die Kinder lernen dreistellige Zahlen zu lesen, zu schreiben, zu vergleichen und im Tausenderbuch zu lokalisieren. Sie legen Zahlen an der Stellentafel, sie ergänzen bis 1000 und zerlegen den Tausender in 2, 4, 5, 8 und 10 gleiche Teile.

Abgesehen davon, dass die Kinder natürlich auch an grundlegende Übungen aktiv herangehen und ihre eigenen Wege gehen sollen, besteht in diesem Bereich inhaltlich eine große Übereinstimmung mit dem traditionellen Unterricht.

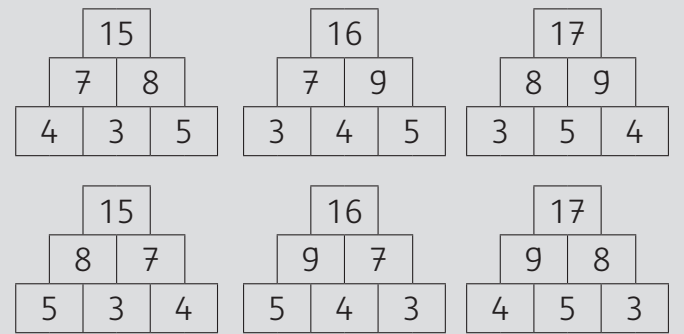
Produktives Üben

Ganz neu im Vergleich mit dem traditionellen Unterricht sind die sogenannten produktiven Übungen, die durch die gemeinsame Förderung inhaltlicher und allgemeiner Lernziele (Kompetenzen) gekennzeichnet sind. Mathematisieren, Explorieren, Argumen-

tieren und Formulieren (bzw. in „politisch-korrekt“ Sprache „Modellieren“, „Problemlösen“, „Argumentieren“ und „Kommunizieren“) kann man nur, wenn ein mathematisches Muster oder eine auf ein Muster bezogene Aufgabe eine Grundlage für solche Aktivitäten bieten. Im „Handbuch produktiver Rechenübungen“, dem Hauptwerk von „mathe 2000“, ist dieser Übungstyp erstmals beschrieben und flächendeckend für den Rechenunterricht umgesetzt worden.⁴ Im ZAHLENBUCH wurde der Ansatz für die Praxis ausgearbeitet.

Eine besondere Bedeutung haben „Übungsformate“ für produktives Üben, die auf mathematischen Strukturen beruhen und wie Formulare unterschiedlich mit Zahlen gefüllt werden können. Im ZAHLENBUCH finden sich folgende Übungsformate: „Schöne Päckchen“, „Schöne Päckchen?“, „Zahlenmauern“, „Rechendreiecke“, „Zauberquadrate“, „Zauberdreiecke“, „Zahlenraupen“ und „Plusquadrate“, zu denen in der Reihe „Probieren und Kombinieren“ noch das Format „Igeldreiecke“ hinzukommt. Diese wenigen, aber sehr reichhaltigen Übungsformate ziehen sich durch alle Bände des „Zahlenbuchs“. Ein Kunterbunt von Übungsformen, die jeweils neu eingeführt werden müssten, nur vorübergehende Bedeutung hätten und letztlich nur Ballast wären, wird absichtlich vermieden, da dies im Widerspruch zur Konzeption des ZAHLENBUCHs steht. Kopiervorlagen im Materialband zum ZAHLENBUCH erleichtern die praktische Arbeit mit den Übungsformaten. Übungsformate kann man nicht nur für Aufgaben mit willkürlich eingetragenen Zahlen, sondern für Aufgabenserien mit Mustern nutzen. Dadurch ist oft eine gute Kontrolle der Ergebnisse gegeben.

Beispiel 1:
Zahlenmauern (Band 1, Seite 91, 8)
Es sind die fehlenden Zahlen in allen sechs Zahlenmauern zu berechnen, die man mit den Grundsteinen 3, 4, 5 bilden kann.



Wenn die Mauern ausgerechnet sind, stechen Muster ins Auge:
– Die Decksteine 15, 16 und 17 treten je zweimal auf.
– Mauern mit gleichen Decksteinen unterscheiden sich durch Vertauschung der äußeren Steine.
– Der größte mittlere Grundstein führt zum größten Deckstein.

Die Kinder können diese Muster beschreiben und versuchen zu erklären, warum das so ist. Dadurch werden die allgemeinen Lernziele Explorieren, Argumentieren und Formulieren gefördert.

⁴ Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N., Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart: Klett 1990/92

In Band 2 (Seite 44) und in Band 3 (Seite 56) tritt dieselbe Aufgabenstellung mit jeweils größeren Zahlen auf. Im Band 4 (Seite 117) wird die Struktur von Zahlenmauern genauer analysiert.

Beispiel 2:
Spiel „Rot gegen Blau“
In der Frühförderung spielen die Kinder das Spiel „Rot gegen Blau“ bis zu den Zielzahlen 10, 11 und 12.
Im Band 1 begegnet den Kindern das Spiel erneut mit Zielzahlen bis 20 (Seite 31). In den Bänden 2 (Seite 21), 3 (Seite 33) und 4 (Seite 41) wird das Spiel mit einer leicht veränderten Regel bis 100, 1000 bzw. 1 000 000 gespielt.

Die Unerschöpflichkeit produktiver Übungsformen

Vielen Aufgaben im ZAHLENBUCH liegen Regeln zugrunde. Aus diesen Aufgaben können Lehrerinnen und Kinder ihren individuellen Präferenzen entsprechend selbst eine beliebige Zahl strukturgleicher Aufgaben bilden. Zur Kennzeichnung solcher „unerschöpflichen“ Aufgaben dient im ZAHLENBUCH ein eigenes Symbol.

Beispiel 1:
Zahlenmauern (Band 1, Seite 91, Aufgaben 9 und 10)
Natürlich können die Kinder auch selbst andere, insbesondere größere Grundsteine wählen, und nachrechnen, ob „es da auch so ist.“ Wer möchte, kann auch Zahlen im Zweierabstand als Grundsteine wählen, z. B. 2, 4 und 6, und alle sechs möglichen Mauern berechnen oder die Grundzahlen beliebig wählen. Statt drei verschiedener Zahlen können auch drei gleiche oder zwei gleiche Zahlen und eine dritte Zahl gewählt werden, usw.

Beispiel 2:
Rechenprogramm (Band 2, Seite 55)
Die Kinder können beliebige Startzahlen wählen und mit ihnen das Rechenprogramm durchlaufen. Es ist spannend zu sehen, in welchem der beiden möglichen Kreisel sie jeweils landen.

Die grün unterlegten Seiten im Schülerbuch enthalten eine Vielzahl solcher unerschöpflichen Aufgaben. Zur weiteren Unterstützung des produktiven Übens steht die Reihe „Probieren und Kombinieren“ zur Verfügung.

Automatisierendes Üben

An die Seite des grundlegenden und des produktiven Übens tritt im ZAHLENBUCH ein dritter Übungstyp: das automatisierende Üben. Aktiv-entdeckendes Lernen und die Automatisierung von Wissenselementen und Fertigkeiten sind keineswegs Gegensätze, sondern bedingen einander: Aktiv-entdeckendes Lernen schafft die Verständnisgrundlage, die für die Automatisierung notwendig ist, und umgekehrt bildet automatisiertes Wissen die notwendige Grundlage für aktiv-entdeckende Lernprozesse auf der nächst höheren Stufe. Diese komplementäre Beziehung muss besonders betont werden, weil in den herrschenden pädagogischen Theorien das „Auswendiglernen“ verpönt ist. Da sich die Kinder nicht beliebig viel merken können, muss genau überlegt werden, welche Wissenselemente und Fertigkeiten

wirklich grundlegend sind, und diese müssen dann gezielt geübt und automatisiert werden. Im ZAHLENBUCH werden in den Bereichen Zahlen, Größen und Formen Basiskompetenzen ausgewiesen, zu deren Übung drei „Basiskurse“ entwickelt wurden. Besonders wichtig ist der Blitzrechnenkurs, der aus 10 Übungen pro Band besteht. Alle Blitzrechenübungen werden bewusst auf einer breiten Anschauungsgrundlage und unter Nutzung von Beziehungen entwickelt. Sie zielen auf die Entwicklung von Zahlvorstellungen und auf Verständnis. Dementsprechend wird jede Blitzrechenübung in zwei Phasen geübt: Die Grundlegungsphase, die zum grundlegenden Üben gehört, dient der Verankerung der Übung in grundlegenden Zahldarstellungen, die nachfolgende Automatisierungsphase der Festigung und „blitzschnellen“ Abrufbarkeit der entsprechenden Wissens Elemente und Fertigkeiten. Ein zu früher Übergang von der Grundlegung zur Automatisierung ist für den Lernprozess schädlich und muss unter allen Umständen vermieden werden.

Für die Grundlegung des Blitzrechnens über das Schülerbuch hinaus eignet sich die Rechenkartei „Blitzrechnen. Basiskurs Zahlen“. In dieses Material sind die grundlegenden Zahldarstellungen systematisch eingebaut. Von den Kleingruppen können die Rechenkarten nach kurzer Einführung eigenständig bearbeitet werden. Auch ein einzelnes Kind kann damit üben, da auf der Rückseite der Karten jeweils die Lösungen angegeben sind.

Für die Automatisierung des Blitzrechnens steht die CD-ROM „Blitzrechnen“ zur Verfügung, die es in drei Versionen gibt. In der Einzelplatz- und der Netzwerkversion für die Schuljahre 1/2 und 3/4 sind neben Übungsmodulen auch Testmodule zu den einzelnen Übungen sowie zu allen Übungen eines Schuljahrs enthalten. Eine abgespeckte Version mit den Übungen eines Schuljahrs kann mit dem Arbeitsheft bezogen werden. Kinder, die Zugang zu einem Computer haben, können damit auch zu Hause ganz alleine üben.

Da der Kurs arbeitsintensiv ist, kann ihn die Lehrerin nicht alleine bewältigen, sondern muss sich auf das Management beschränken, d. h. sie muss Kinder anleiten, eigenverantwortlich zu üben und sie muss die Mithilfe der Eltern organisieren (s. unten).⁵

Zur Organisation der Blitzrechenübungen im Unterricht

Die Grundlegung jeder Übung wird im Schülerbuch eingeführt und kann in Partnerarbeit oder in der Kleingruppe mit dem entsprechenden Operationsfeld im Schülerbuch und im Arbeitsheft durchgeführt werden. Die Kinder können auch mit der Rechenkartei und der CD-ROM üben. Genauso wie jede Übungsstunde im Sport mit einem „warm up“ beginnt, sollte in der Regel am Beginn jeder Mathematikstunde eine kleine Runde im Blitzrechnen oder blitzrechenartiger Aktivitäten stehen, in der die mathematischen Areal des Gehirns auf „Betriebstemperatur“ gebracht werden. Angesichts des Nachdrucks, der beim Blitzrechnen auf die Entwicklung von Zahlen- und Rechenverständnis gelegt wird, ist die flüssige Beherrschung der Übungen des Kurses ein sehr guter Indikator für das Erreichen der grundlegenden inhaltlichen Lernziele.

⁵ Für detaillierte Hinweise zum Blitzrechnenkurs sei auf die Schrift „Blitzrechenoffensive“ hingewiesen, herunter zu laden von der „mathe2000“-Homepage (www.tu-dortmund.de/mathe2000).

Daher zahlt es sich aus, wenn die Lehrerin den Fortschritt der Kinder beim Blitzrechnen ständig im Auge behält. In der Einzelplatz- und der Netzwerkversion werden die drei letzten Testergebnisse der Kinder zu den einzelnen Übungen und das beste Ergebnis des Gesamttests in einem „Lehreraccount“ festgehalten. Die Lehrerin hat mit einem Passwort Zugang zu diesen Daten und kann sich so mühelos über die Übungsfortschritte informieren.

Es empfiehlt sich, die Beherrschung jeder Übung in einem „Blitzrechenpass“ (Kopiervorlage) festzuhalten. Damit bekommt jedes Kind eine individuelle Rückmeldung über seinen Lernstand. Die zwei Teilprüfungen für jede einzelne Übung (in gezieltem zeitlichen Abstand voneinander) sowie für die Abschlussprüfung über den gesamten Kurs können zeitsparend in Gruppen abgelegt werden. Die Kinder können sich vorher gegenseitig testen und entscheiden, wann sie sich zu einer Prüfung melden. Wenn im Klassenzimmer ein Computer zur Verfügung steht, kann der Lernstand auch am Computer überprüft werden, da sich jedes Kind beim Üben persönlich eintragen muss.

Mitarbeit von „Rechentrainern“ beim Blitzrechnen

Der Blitzrechnenkurs erreicht dann seine optimale Wirkung, wenn es gelingt, nicht nur die Kinder, sondern auch Eltern oder andere Bezugspersonen von der Notwendigkeit und Wichtigkeit des Kurses zu überzeugen. Lehrer, Kinder und Eltern müssen die Übungen bewusst als ständiges „Fitnessprogramm“ verstehen und konsequent durchführen: „Übe so immer wieder!“ Bereits beim ersten Elternsprechtag sollte dieser wichtige Punkt geklärt und damit gleichzeitig die Mitarbeit der Eltern in sinnvolle Bahnen gelenkt werden. Die Eltern sollten in das Konzept des Kurses eingeführt werden, den Unterschied zwischen Grundlegung und Automatisierung verstehen und lernen, wie die Grundlegung der 10 Blitzrechnenübungen unter Benutzung der Seiten 134–135 im Schülerbuch und des hinteren Umschlags des Arbeitsheftes geht. Anschließend sollte mit den Eltern überlegt werden, wer für ihr Kind als „Blitzrechen-Trainer“ rekrutiert werden kann. Die Unterstützung beim Blitzrechnen ist bei solchen Eltern kein Problem, die von sich aus an den Lernfortschritten ihrer Kinder interessiert sind und die nötige Zeit aufbringen können. Für Kinder, bei denen diese Voraussetzung nicht gegeben ist, sollten andere „Blitzrechen-Trainer“ gefunden werden, die sich für den Kurs mitverantwortlich fühlen, z.B. ein älteres Geschwisterkind oder ein(e) andere(r) Verwandte(r), ein(e) Mitschüler(in), ein(e) Mitarbeiter(in) bei der Ganztagsbetreuung, oder Betreuer bei der Hausaufgabenhilfe.

4. DIE FÖRDERUNG VON KINDERN MIT UNTERSCHIEDLICHEN VORAUSSETZUNGEN NACH DEM PRINZIP VON DER NATÜRLICHEN DIFFERENZIERUNG

Ich glaube an den sozialen Lernprozess, und darum trete ich für die heterogene Lerngruppe ein ... [Sie] umfasst Schüler verschiedener Niveaus, die an einer Aufgabe – jeder auf der ihm eigenen Stufe – zusammenarbeiten ...

Hans Freudenthal: Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht

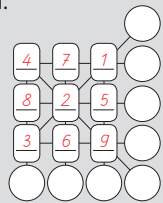
Die üblichen Methoden der („inneren“ und „äußeren“) Differenzierung bestehen darin, dass die Lehrperson Gruppen von Kindern oder einzelnen Kindern Aufgaben für ein bestimmtes Lernziel zuweist, die nach Einschätzung der Lehrperson dem jeweiligen Lernstand entsprechen. Es gibt Unterrichtswerke, bei denen die Kinder weitgehend unabhängig voneinander Heftchen für Heftchen abarbeiten. Dadurch werden aber nicht nur die Bildungsstandards verfehlt, auch soziales Lernen wird verhindert, obwohl es erklärtes pädagogisches Ziel der Schule ist. Im ZAHLENBUCH wird ein grundsätzlich anderer Weg der Differenzierung beschrieben: das Werk ist vom Grundsatz her so konzipiert, dass Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen, Interessen und Möglichkeiten gemeinsam damit arbeiten können und gleichwohl individuell gefördert werden. Die notwendige Differenzierung ergibt sich aufgrund einer Schichtung im Aufbau des Werkes von selbst:

- Das ZAHLENBUCH bietet einerseits eine Grundlage für den Erwerb der Kenntnisse und Fertigkeiten, die für das weitere Lernen notwendig und daher für alle Kinder in gleicher Weise verbindlich sind. Das Arbeitsheft enthält Übungen der unteren und mittleren Anforderungsstufe zur Festigung und Vernetzung der Grundlagen. Bereits auf dieser Stufe besteht ein Spielraum bei der Auswahl der Aufgaben, der Wahl der Rechen- und Lösungswege und der Form der Darstellung, der den Kindern in einem gewissen Rahmen eine Selbststeuerung ermöglicht.
- Auf dieser Grundlage bauen Lernangebote auf, die sich ebenfalls an alle richten, aber von jedem Kind nach seinen Möglichkeiten individuell wahrgenommen werden können und dürfen. Es handelt sich hier also um eine Differenzierung vom Kind aus, nicht um eine Differenzierung von der Lehrperson aus wie bei den üblichen Formen der „inneren“ und „äußeren“ Differenzierung. Außerhalb der Schule ist diese Form der Differenzierung eine Selbstverständlichkeit. Daher sprechen wir von „natürlicher Differenzierung“. Diese Form ist eine originelle Entwicklung des Projekts „mathe 2000“ und ein Markenzeichen des ZAHLENBUCHs.

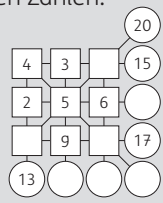
Angebote zur natürlichen Differenzierung, die im ZAHLENBUCH grün unterlegt sind, setzen immer auf der unteren Anforderungsstufe (Basiskompetenzen) an, reichen aber bis in die höchste Anforderungsstufe hinein und verknüpfen die Übung allgemeiner mathematischer Kompetenzen mit der Übung inhaltlicher Kompetenzen. Die Kinder werden bei der Bearbeitung dieser Angebote unterschiedlich weit kommen, was aber kein Problem ist, denn ihre mathematischen Kräfte werden auch dann gesteigert, wenn sie sich mit diesen Angeboten nur auf der unteren Anforderungsstufe befassen. Trotz unterschiedlicher Bearbeitungen ist ein sozialer Austausch möglich, auf den größter Wert gelegt wird.

Wenn beispielsweise die Ergebnisse von Rechnungen an der Tafel zusammengetragen werden, damit auf dieser Grundlage Muster erkannt und beschrieben werden, können auch Kinder einbezogen werden und den Anschluss finden, die selbst nur wenige Rechnungen durchgeführt haben.

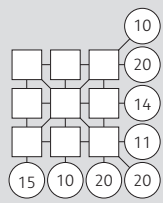
Beispiel 1:
Plusquadrate (Band 1, Seiten 118–119)
Die Übungen beginnen mit Plusquadraten, bei denen aus allen vorgegebenen inneren Zahlen die äußeren Zahlen berechnet werden müssen.



Es folgen Plusquadrate mit inneren Lücken und einigen vorgegebenen äußeren Zahlen.



Die höchste Stufe bildet ein Plusquadrat, bei dem nur die äußeren Zahlen vorgegeben sind. Alle Kinder beginnen bei der unteren Stufe und arbeiten sich soweit nach oben, wie sie können.



Beispiel 2:
Würfelgebäude (Band 3, Seiten 90–91)
Diese Doppelseite beginnt mit der Zuordnung von Gebäuden zu Plänen. Es folgen Aufgaben, bei denen alle Gebäude zu finden sind, die auf einem gegebenen Grundriss mit einer bestimmten Anzahl von Würfeln gebaut werden können. Den Schluss bildet eine Gruppenarbeit: Es sollen alle Gebäude gefunden werden, die mit bis zu 4 Würfeln gebaut werden können. Alle Kinder können sich nach ihren Möglichkeiten einbringen.

Das Prinzip von der natürlichen Differenzierung ist von besonderer Bedeutung für die Lösung der wohl größten pädagogischen Herausforderung, vor der die Grundschule steht: den Umgang mit Heterogenität. Die traditionelle Antwort auf diese Herausforderung besteht darin, am „Punkt Null“ zu beginnen und den Wissenserwerb der Kinder auf einem unteren bis mittleren Niveau klein- und gleichschrittig zu normieren. Dieser Ansatz, bei dem die Bedürfnisse der leistungsstarken Kinder völlig ignoriert werden, wurde und wird auch heute noch mit dem Argument verteidigt, er komme den schwachen Kindern besonders entgegen. Tatsächlich lernen aber auch und gerade schwache Kinder

am besten, wenn ihnen Freiräume gewährt werden. Auch pädagogische Gründe sprechen daher für das Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernens, wie es im ZAHLENBUCH realisiert ist. Die Kinder können die reichhaltigen Lernangebote im Sinne der natürlichen Differenzierung nach ihren individuellen Voraussetzungen nutzen. Auf diese Weise werden alle Kinder bei der Bearbeitung gemeinsamer Themen zusammengehalten. Sowohl Kinder mit Lernschwierigkeiten als auch leistungsstarke Kinder können aus dem Unterricht heraus gefördert werden. Spezielle zusätzliche Förderprogramme für schwächere oder begabte Kinder sind – abgesehen von Extremfällen – unnötig. Wie erfolgreich dieser Weg ist, wenn er konsequent beschritten wird, zeigen die Erfahrungen mit dem ZAHLENBUCH unter unterschiedlichsten Bedingungen: Das ZAHLENBUCH findet einerseits großen Zuspruch in Förderschulen und dient andererseits als Anregung für die Förderung mathematisch begabter Kinder.

Es besteht kein Grund zur Sorge, dass die mit aktiv-entdecken dem Lernen verbundene natürliche Differenzierung zu einem Auseinanderfallen der Klasse führen könnte. Durch verbindliche Lernziele, insbesondere den Blitzrechnenkurs, wird dafür gesorgt, dass trotz aller individuellen Unterschiede während des Lernprozesses am Ende ein ausreichender gemeinsamer Wissensbestand vorhanden ist.

Der „alternative Ansatz“ zur Förderung von Kindern mit Lernschwierigkeiten

In der alternativen Medizin gelten diejenigen Heilmittel als besonders wertvoll, die nicht spezifisch auf eine bestimmte Körperfunktion wirken, sondern auf die allgemeine Stärkung des gesamten Organismus zielen. Entsprechend besteht der „alternative Ansatz“ des ZAHLENBUCHs zur Förderung von Kindern mit Lernschwierigkeiten nicht in spezifischen „Fördermaßnahmen“, sondern in einer unspezifischen Förderung, die organisch in das Konzept integriert ist. Lernschwierigkeiten können damit an der Wurzel erfasst werden. Folgende Punkte wirken sich bei diesem Ansatz positiv aus:

- Durch eine geeignete Förderung schon im Kindergartenalter lassen sich Lernschwierigkeiten vermeiden oder zumindest abmildern. Hierfür steht das ZAHLENBUCH-Frühförderprogramm zur Verfügung. In Zusammenarbeit mit den Kindergärten können damit bereits im Vorfeld wichtige Grundlagen gelegt werden.
- Die im ZAHLENBUCH konsequent verfolgte Konzentration auf mathematische Grundideen, die Beschränkung auf wenige grundlegende Anschauungs- und Arbeitsmittel und auf eine kleine Zahl wiederkehrender Übungsformate sowie die Benutzung einer schlichten Sprache sind didaktische Maßnahmen, die gerade den schwächeren Kindern das Lernen erleichtern. Der Förderbedarf wird damit generell reduziert.
- Der Blitzrechnenkurs stellt ein in den Unterricht eingebettetes Diagnose- und Förderprogramm für Kinder mit Lernschwierigkeiten dar, auf das gezielte schulische und außerschulische Fördermaßnahmen unmittelbar zurückgreifen können. Die Rechenkartei „Blitzrechnen“ bietet sich hier in besonderer Weise als Fördermaterial an.

Die Förderung leistungsstarker Kinder

Als „ZAHLENmuster-BUCH“ enthält das Werk viele produktive Aufgaben, die über die Übung von Fertigkeiten hinaus Optionen zur selbstständigen Fortsetzung, Variation und Erfindung arithmetischer und geometrischer Muster bieten. In einzelne Aufgaben sind Muster eingebaut, die sogar bis in die höhere Mathematik hineinreichen. Bei den Praxishinweisen zu den einzelnen Schülerbuchseiten werden entsprechende Möglichkeiten aufgezeigt. Leistungsstarke Kinder können das „unerschöpfliche Aufgabenangebot“ des ZAHLENBUCHs nutzen und sich unter Variation vorgegebener Themen mathematische Inseln selbstständig erarbeiten. Eine Förderung dieser Kinder ist somit ebenfalls aus dem normalen Stoff heraus möglich. Diese Besonderheit des ZAHLENBUCHs sollte den leistungsstarken Kindern bewusst gemacht werden, damit sie das Potenzial des Buches von sich aus ausschöpfen, ohne ständig von der Lehrerin „Futter“ zu erwarten.

Unterricht in jahrgangsgemischten Klassen

In altersgemischten Klassen, die bei geringen Schülerzahlen notwendig sind, reicht das Prinzip der natürlichen Differenzierung nicht aus. Dem sehr unterschiedlichen Entwicklungsstand entsprechend müssen daher Lerngruppen gebildet werden, die an unterschiedlichen Stellen des Curriculums, d.h. auch mit anderen Bänden des ZAHLENBUCHs arbeiten. Lerngruppen sind schon deshalb zwingend, weil unterschiedliche mathematische Themen, z.B. das Einspluseins im ersten Schuljahr und das Einmaleins im zweiten Schuljahr, unterschiedliche Strukturen aufweisen. Natürlich gibt es auch Themen in verschiedenen Klassenstufen, die in enger Beziehung stehen, z.B. das Einspluseins im ersten Schuljahr und die halbschriftliche Addition im zweiten Schuljahr. Aber selbst bei solchen Themen ist den Kindern des jeweiligen Schuljahrs weit besser gedient, wenn sie sich auf ihr Thema konzentrieren. Kinder im ersten Schuljahr sollten z.B. zuerst das Einspluseins im Zwanzigerraum gründlich lernen, bevor sie sich zusammenhängend mit Aufgaben im Hunderterraum befassen. Zu beachten ist auch, dass bei einem fachlich schlüssigen Curriculum verwandte Themen in verschiedenen Schuljahren zu verschiedenen Zeiten behandelt werden.

Bei der Organisation von Lerngruppen zeigt das Konzept des ZAHLENBUCHs seine ganze Stärke:

- Der transparente, schlüssige Aufbau des Werkes in Themenblöcken und die Förderung einer aktiv-entdeckenden Lernhaltung unterstützen zusammen das folgende Klassenmanagement: Jede Lerngruppe wird jeweils in einen thematischen Block eingeführt und angeleitet, die entsprechenden Abschnitte im ZAHLENBUCH und Arbeitsheft soweit wie möglich selbstständig zu bearbeiten. In dem bereitliegenden Lösungsband können die Kinder ihre Lösungen kontrollieren.
- Wie die thematisch strukturierten Inhaltsübersichten der einzelnen Bände des ZAHLENBUCHs deutlich machen, wird in der Arithmetik jeder Zahlenraum in folgender Sequenz behandelt: Orientierung, Einführung von Rechenwegen an einem komplexen Beispiel, einfache Aufgaben, Übergang von einfachen zu schweren Aufgaben, vertiefende Übungen, ergänzende Übungen, Blitzrechenübungen. Weiter kehrt eine kleine Zahl von Übungsformaten ständig wieder. In der Geometrie und im Sachrechnen werden ebenfalls einige wenige Grundideen über die Schuljahre hin entfaltet. Durch diese sich ständig wiederholenden Lehr-/Lernformate wird der Erklärungsbedarf in

beträchtlichem Maße reduziert. An den besonders gestalteten Inhaltsübersichten können sich die Kinder diesen Aufbau selbst klar machen und die verschiedenen Bände des ZAHLENBUCHs als Teile einer Reihe verstehen, auf die sie frei zugreifen können.

- Die systematisch wiederkehrenden Lernstrukturen ermöglichen und erleichtern nicht nur den Übergang von einer Lerngruppe zu einer anderen, sondern auch den informellen Austausch zwischen den Gruppen, dessen positive Wirkungen nicht unterschätzt werden dürfen. In diesem Sinn können von Zeit zu Zeit sogar Kinder höherer Klassen mit Kindern aus unteren Klassen zusammengeführt werden. Auch der Einsatz von Kindern aus fortgeschrittenen Lerngruppen als Tutoren wird durch den besonderen Aufbau des ZAHLENBUCHs erleichtert.⁶

⁶ Hinweis: Weitere Einzelheiten zu der Frage „Jahrgangsmischung ja oder nein“ finden sich in der Schrift „Mathematikunterricht in jahrgangsbezogenen und jahrgangsgemischten Klassen – mit dem ZAHLENBUCH“, die vom Klettverlag bezogen und in etwas verkürzter Form von der „mathe 2000“-Homepage (www.tu-dortmund/mathe2000) herunter geladen werden kann.

5. LERN- UND LEISTUNGSKONTROLLEN

Kinder werden nicht dadurch größer,
dass man sie ständig misst.
Anonymus

Eltern, Lehrer und Schulbehörden möchten aus unterschiedlichen Gründen wissen, welche Voraussetzungen Kinder zur Schule mitbringen, welche Fortschritte sie machen und inwieweit die vorgesehenen Ziele am Ende von Schuljahren oder Schulstufen erreicht worden sind. Die Kinder möchten auch selbst wissen, wie sie vorangekommen sind und wo sie stehen. Aus der Sicht der Schulaufsicht sind bei der Lern- und Leistungskontrolle immer zwei Aspekte involviert: *Diagnose* und *Beurteilung* (Benotung). Diese Aspekte werden oft nicht getrennt, was nicht nur deshalb geschieht, weil „Diagnose“ in der Außendarstellung freundlicher klingt als „Benotung“, sondern weil sich diese Aspekte auch schwer trennen lassen: auch aus Lernzielkontrollen am Ende der Behandlung eines Stoffabschnitts, die zur Leistungsfeststellung dienen, lassen sich Informationen darüber entnehmen, welche Fertigkeiten im weiteren Unterricht nochmals geübt werden müssen. Neben Formen der Lern- und Leistungskontrolle, die Teil des Unterrichts sind, spielen externe Formen der Kontrolle, die in den letzten Jahren von den angelsächsischen Ländern unkritisch übernommen wurden, leider eine immer größere Rolle. Bildungspolitiker und Bildungsforscher versprechen sich von national und international organisierten Vergleichstests (VERA, PISA & Co.) eine „Qualitätssicherung“ von „Bildungsstandards“, obwohl eine sorgfältige Analyse des wahren Bildungsniveaus in diesen Ländern dafür keinerlei Grundlage bietet. Die Autoren des ZAHLENBUCHs beurteilen diese Entwicklung äußerst kritisch.⁷ Sie sehen sich aber auch verpflichtet, Lehrerinnen und Lehrern zu helfen, sich mit diesen aufgezwungenen Formen der Lernkontrolle so zu arrangieren, dass inhaltliche Lernfortschritte, die im eigentlichen Interesse der Kinder liegen, möglichst wenig gefährdet werden. Dies soll im Folgenden zuerst kurz aufgezeigt werden, bevor ausführlicher auf sinnvolle Formen der Lernkontrolle eingegangen wird, die organisch in den Lernprozess eingebaut sind und zu einer echten Leistungssteigerung führen (*systemische Qualitätssicherung*).

Externe Lernzielkontrollen

Das ZAHLENBUCH bereitet die Kinder inhaltlich auf externe Lernzielkontrollen folgendermaßen vor:

- Die inhaltlichen und allgemeinen Lernziele (Kompetenzen) der Bildungsstandards werden im ZAHLENBUCH gründlich und umfassend behandelt. Ziel dabei ist die Entwicklung von mathematischem Verständnis. Der durchgehende „Blitzrechenkurs“ sorgt für sicheres Grundwissen. Aber auch die allgemeinen Lernziele werden umfassend behandelt: Die Kinder lernen, Muster zu entdecken, fortzusetzen und zu begründen, und sie lernen, ihre Überlegungen mündlich und schriftlich zu formulieren. Ein schlüssiger Sachrechenkurs, bei dem die Kinder lernen, Situationen der Lebenswelt mathematisch zu durchdringen, zieht sich symmetrisch durch alle Bände. Damit wird das volle Spektrum der Bildungsstandards abgedeckt.

⁷ s. dazu die Dokumentation der VERA-Kontroverse auf der „mathe 2000“-Homepage www.tu-dortmund.de/mathe2000

Alle Arbeitshefte enden mit einer zusammenfassenden Wiederholung der zentralen Lernziele.

- Das ZAHLENBUCH leitet dazu an, Aufgabentexte selbstständig zu erschließen und mathematisch sinnvoll zu bearbeiten.

Zur Vorbereitung auf externe Tests ist es darüber hinaus erforderlich, die Kinder anhand von Beispielaufgaben und Beispieltests auch in Besonderheiten der Bearbeitung von Testaufgaben einzuführen, die mit Mathematik nichts zu tun haben, z.B. in das Ankreuzen von Ergebnissen bei multiple choice-Aufgaben, das Notieren von Ergebnissen am dafür vorgesehenen Platz, evtl. auch das Arbeiten unter scharfer Zeitbegrenzung, das Vorziehen von Aufgaben, die man schnell versteht und lösen kann. Diese Vorbereitung muss nebenher geleistet werden, sie darf nicht zu Lasten der eigentlich wichtigen systemischen Formen der Lernkontrolle gehen, die im Folgenden ausführlich erläutert werden.

Eingangstests

Vor Beginn einer neuen Schulstufe werden Eingangstests benutzt, um sich ein erstes Bild von den Kindern zu machen, den eventuell nötigen Förderbedarf einzuschätzen oder über die Zuordnung zu bestimmten Lerngruppen zu entscheiden. ZAHLENBUCH-konforme Eingangstests, die auf die *arithmetischen und geometrischen Grundideen* zugeschnitten sind, finden sich im Materialband. Der Aufwand von Eingangstests lohnt sich besonders, wenn genügend Ressourcen vorhanden sind, um anschließend eventuell erforderliche Fördermaßnahmen durchzuführen.

Unabhängig davon wird im ZAHLENBUCH die Eintrittsschwelle schon für die ersten Lernangebote so niedrig angesetzt, dass auch Kinder mit geringen Vorkenntnissen mitmachen und mitlernen können. Die Beobachtung der Kinder im laufenden Unterricht zeigt, wer sich bei bestimmten Aufgaben schwer tut und besonders gefördert werden muss, und diese Förderung kann zwanglos in den weiteren Unterricht eingebaut werden. Generell ist den Kindern am besten gedient, wenn schon vor der Schule im Kindergarten das ZAHLENBUCH-Frühförderprogramm umgesetzt wird. Dann kann begründet festgestellt werden, ob ein Kind die Voraussetzungen für die Einschulung hat, und zwar allein aufgrund seines Verhaltens bei den Spielen und Bauanleitungen des Programms. Hier sind keine besonderen Tests erforderlich. Für Kinder, die sich langsamer entwickeln, ist es sicherlich besser, wenn sie später eingeschult werden. Die Festsetzung von Stichtagen für die Einschulung, wie das immer mehr Bundesländern praktizieren, halten wir für sehr problematisch.⁸

Standortbestimmungen

Zu Beginn der Behandlung zentraler Themen sollte jeweils eine Standortbestimmung durchgeführt werden. Dabei wird den Kindern zuerst an Beispielen klar gemacht, um welche Aufgaben es geht. Die Kinder werden dann aufgefordert, Aufgaben, „die sie schon können“, schriftlich zu bearbeiten. Die Analyse der Bearbeitungen liefert wertvolle Anhaltspunkte für den weiteren Unterricht.

⁸ s. dazu Puhani, P.A. & Weber, A. (2008) Does the early bird catch the worm? The economics of education and training. Heidelberg: Physica-Verlag, S. 105-132. In dieser sorgfältig durchgeführten empirischen Studien wird nachgewiesen, dass sich eine spätere Einschulung langfristig sehr positiv auf den Schulerfolg auswirkt.

Beispiel:
Als „Ortungsaufgaben“ für den ganzheitlichen Einstieg in das erste Rahmenthema „Entwicklung des Zahlbegriffs“ im Band 1 des ZAHLENBUCHs bieten sich z.B. folgende Aufgaben an, die zuvor an entsprechenden Beispielen erläutert werden müssen:
– Schreibe die Zahlen der Reihe nach auf, soweit du möchtest.
– Schreibe große Zahlen und die größte Zahl auf, die du schon kennst.
– Male zu einigen Zahlen Mengen mit so vielen Dingen, wie die Zahl angibt.

Diagnostische Tests

Differenzierte Einblicke in den Verlauf von Lernprozessen, aus denen sich differenzierte Hinweise für die Hilfe zur Selbsthilfe, insbesondere zur Überwindung von Fehlern ergeben, erhält man mit dem geringsten Aufwand und am besten während des Unterrichts: im Gespräch mit den Kindern anhand der Bearbeitung von Aufgaben an der Tafel oder im Heft. Diese schlichte Erkenntnis hat Howard F. Fehr bereits vor 50 Jahren mustergültig formuliert:⁹

Während des Unterrichts müssen die Überlegungen der Kinder ständig beobachtet und bewertet werden. Schriftliche Tests reichen hierfür nicht aus. Häufige mündliche Erklärungen [der Kinder] bilden eine bessere Grundlage, um das Verständnis zu überprüfen. Aber im Hinblick auf den Lernprozess ist es noch wichtiger, dass die Kinder aus eigenem Antrieb und unter Führung der Lehrkraft ihren Lernfortschritt ständig selbst einschätzen, ihre eigenen Stärken und Schwächen erkennen und durch aus dem Unterricht erwachsene Tests erkennen, wo sie stehen, und selbst die Hilfe anfordern, die sie benötigen. Wir müssen die Kinder mehr und mehr dazu bringen, selbst Verantwortung für ihre Lernfortschritte zu übernehmen.

Kinder müssen immer wieder aufgefordert werden, ihre Rechen- und Lösungswege zu erklären und ihre Überlegungen zu begründen. Sie werden dabei umso mehr aus sich herausgehen, je mehr sie darauf vertrauen können, dass im Verlauf von Lernprozessen keine Leistungsbewertung stattfindet. Bei Einführung eines neuen Themas ist im Interesse einer frühen Diagnose von Schwierigkeiten die gründliche Besprechung weniger typischer Aufgaben wichtiger als die Bearbeitung vieler Aufgaben. Zusätzliche diagnostische Tests sind auch aus folgendem Grund überflüssig: Es ist von vornherein klar, dass Schwierigkeiten der schwächeren Kinder auf der mangelnden Beherrschung von Basiskompetenzen beruhen. Das liegt in der Natur von Basiskompetenzen. Im Blitzrechnenkurs, der für alle Kinder verbindlich ist, werden die Basiskompetenzen aber ohnehin geübt, ganz unabhängig davon, ob diagnostische Tests einen Förderbedarf signalisieren oder nicht. Wenn Blitzrechnen geübt wird, sieht man, wo die Kinder noch Schwächen haben, und kann gezielt fördern (s. das obige Zitat und die Ausführungen zum Blitzrechnenkurs im vorhergehenden Abschnitt).

Ergebniskontrollen

Weniger aussagekräftig als Rückmeldungen zu Lösungswegen, aber dafür viel einfacher zu geben sind Rückmeldungen zu Ergebnissen. Hierfür ist eine Unterscheidung zu beachten, auf die schon Wilhelm Oehl mit aller Klarheit hingewiesen hat:¹⁰

[Wir müssen] zwischen Fremdkontrolle und Selbstkontrolle unterscheiden. Sagt der Lehrer dem Schüler: „Diese Aufgabe ist falsch“, so handelt es sich einwandfrei um Fremdkontrolle. Aber auch in allen andern Fällen, in denen irgendein Hilfsmittel, etwa ein Ergebnisheft oder eine Prüfpzahl ... dem Schüler sagt: „Diese Aufgabe ist falsch“, haben wir es mit Fremdkontrolle zu tun. Das richtige Ergebnis (im Ergebnisheft) oder die Prüfpzahl sind von einem „Fremden“ gegeben worden. Handelt es sich um eine Aufgabe aus dem praktischen Leben oder irgendeine Aufgabe, die außerhalb des Rechenbuchs gestellt wurde, so entfallen solche Hilfen; der Schüler muß jetzt durch eigenes Nachdenken, durch eigenes Anwenden mathematischer Hilfsmittel die Entscheidung treffen: falsch oder richtig. Selbstkontrolle ist immer Individualkontrolle ohne jede fremde Hilfe. Die echte Selbstkontrolle muß auf jede Aufgabe in gleicher Weise anwendbar sein und nicht nur auf die Aufgaben des Rechenbuches. Diese begriffliche Klarstellung ist notwendig, weil sich in den zurückliegenden Jahren Kontrollmethoden in unseren Schulen unter dem anspruchsvollen Etikett „Selbstkontrolle“ (Prüfpzahlen) eingebürgert haben, die in Wirklichkeit Fremdkontrollen sind. ... Die Selbstkontrolle verlangt von ihrem Begriff her eine erhöhte geistige Urteilskraft. Ich soll mathematische Beziehungen kontrollieren, d.h. doch, ich soll von einem übergeordneten Standpunkt aus, kraft meiner Einsicht in die Zusammenhänge, ein gültiges Urteil über richtig oder falsch abgeben. Jeder Kontrolle muß ein Denkakt zugrunde liegen, die die Kontrollmaßnahmen auslöst.

Da das ZAHLENBUCH auf die Entwicklung von Verständnis ausgerichtet ist, wird die echte Selbstkontrolle besonders betont. Die Kinder werden angeleitet, Beziehungen zu anderen ähnlich strukturierten Aufgaben herzustellen, ihre Ergebnisse abschätzen, sich mit anderen Kindern auszutauschen und auf Arbeitsmittel zurückzugreifen. Das ZAHLENBUCH unterstützt diese auf Eigenverantwortung zielenden Formen der Selbstkontrolle dadurch, dass in viele Aufgaben Muster eingebaut sind, deren Störung auf Fehler hinweist.

Beispiel 1:
Band 1, Seite 62, Aufgabe 6 und 7

Aufgabe 6

9 – 5	12 – 5	12 – 11	18 – 8
10 – 5	7 – 5	12 – 1	18 – 9
10 – 4	8 – 5	12 – 12	13 – 5

Aufgabe 7

10 – 6	12 – 6	9 – 8	20 – 10
9 – 6	10 – 3	9 – 9	12 – 10
11 – 6	18 – 10	14 – 3	10 – 1

Jede Zahl von 0 bis 11 kommt genau einmal als Ergebniszahl vor.

⁹ Fehr, H. (1953): A philosophy of arithmetic instruction. Nachgedruckt in *Arithmetic Teacher* 36 (1988), 437–441

¹⁰ Oehl, W. (1962): Der Rechenunterricht in der Grundschule. Hannover: Schroedel, S. 33–34

Beispiel 2:
Band 2, Seite 101, Aufgabe 10

2 · 2 1 · 3	3 · 3 2 · 4	4 · 4 3 · 5	5 · 5 4 · 6	6 · 6 5 · 7	7 · 7 6 · 8
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

Die Ergebnisse der Aufgabenpaare unterscheiden sich immer um 1.

Beispiel 3:
Band 3, Seite 84, Aufgabe 1
Bei den Ergebnissen kommen nur die Quersummen 12 und 21 vor.

In gewissem Umfang sind im Unterricht natürlich auch Formen der äußeren Kontrolle notwendig. Dies gilt z.B. für das Blitzrechnen, wo die Kinder schnelle Rückmeldungen auf ihre Antworten erhalten müssen. Auf den Rückseiten der Rechenkarten und auf den Aufgabenblättern der Rechenkartei „Blitzrechnen“ sind daher die Lösungen eingetragen, auf der CD-ROM „Blitzrechnen“ werden falsche Ergebnisse vom Computer nicht angenommen. Auch die Ergebnisse von Rechnungen, denen keine hilfreichen Muster zugrunde liegen, müssen kontrolliert werden. Dem Vorschlag von Wilhelm Oehl folgend werden daher zum Schülerbuch und zum Arbeitsheft Lösungsbände angeboten, anhand derer die Kinder ihre Rechnungen selbst kontrollieren können. In altersgemischten Klassen erleichtert dies das Klassenmanagement ganz erheblich.

Interne Lernzielkontrollen

Schriftliche Arbeiten zur Leistungsbewertung haben ihren Platz am Ende von Lernabschnitten, wenn der betreffende Stoff gründlich behandelt worden ist und die Kinder damit vertraut sind. Solche Tests sollten so konstruiert sein, dass alle Anforderungsbereiche abgedeckt werden. Als Vorbild dienen die Lernzielkontrollen im Materialband. Wie an diesen Beispielen zu sehen ist, umfassen diese Kontrollen aus gutem Grund Aufgaben, die von den Kindern in ähnlicher Form schon bearbeitet worden sind. Eine Leistungsbeurteilung mit Aufgaben, die eigens zur Leistungsbeurteilung konstruiert sind, ist widersinnig. Beachtet werden muss, dass sich der Leistungsstand von Kindern mit schriftlichen Tests allein nicht ausreichend ermitteln lässt. Kinder können in der Regel mehr, als sie in schriftlichen Tests zeigen können. Es sind daher weitere Formen von Leistungsnachweisen nötig. Aktiv-entdeckende und soziale Arbeitsformen bieten den Kindern vielfältige Möglichkeiten, ihr Können zu zeigen: in mündlichen Tests (Blitzrechenpass), in mündlichen oder schriftlichen Beiträgen zum Unterricht (insbesondere an der Tafel), in der schriftlichen Bearbeitung von Aufgaben im Heft oder auf Arbeitsblättern, oder anhand materieller Produkte, die im Unterricht hergestellt wurden. Die zuletzt genannte Form von Leistungsnachweis ist besonders für geometrische Themen wichtig, die sich schriftlich nicht angemessen prüfen lassen. Diese Formen der Lernkontrolle haben den unschätzbaren Vorteil, dass der Vertrauensschutz gewahrt ist: es wird nur getestet, was die Kinder gelernt haben, und zwar anhand von Aufgabenformaten, die den Kindern bekannt sind. Dies entspricht der normalen Praxis im Arbeitsleben, wo in aller Regel eine gewisse Zeit für die Einarbeitung in neue Aufgaben eingeräumt wird, bevor Leistungen verlangt werden.