Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule?[1]

Erich Ch. Wittmann

Abstrakte Symbole, die nicht durch eigene Aktivität des Kindes mit Sinn gefüllt, sondern ihm von außen aufgeprägt werden, sind tote und nutzlose Symbole. Sie verwandeln den Lernstoff in Hieroglyphen, die etwas bedeuten könnten, wenn man nur den Schlüssel dazu hätte. Da aber der Schlüssel fehlt, ist der Stoff eine tote Last.

John Dewey (1859-1953)

Der Mathematikunterricht befindet sich heute offenkundig in einer Krise – nicht nur in Deutschland. Dies betrifft keineswegs nur seine Ineffektivität, wie sie - nicht nur - aus den Ergebnissen unserer Schülerinnen und Schüler bei TIMSS und PISA abzulesen ist. Die Probleme liegen tiefer. Das nachlassende Interesse für das Studienfach Mathematik – auch in Ländern, die bei TIMSS und PISA gut abgeschnitten haben - ist dafür ein untrügliches Indiz.

In der Bildungspolitik wurden inzwischen Maßnahmen eingeleitet, die eine Besserung bewirken sollen. Am stärksten vorangetrieben wird die Einführung regelmäßiger Vergleichstests auf lokaler, nationaler und internationaler Ebene, von der sich die Bildungspolitiker und ihre Berater aus der Bildungsforschung offensichtlich den größten Effekt versprechen (obwohl die Erfahrungen in anderen Ländern das Gegenteil lehren). Großes Gewicht wird weiter auf eine frühere und intensivere mathematische Förderung in der Grundschule und schon im Kindergarten gelegt. Natürlich werden auch neue Lehrpläne ins Auge gefasst, die den Mathematikunterricht „lebensnäher“ und damit, wie man glaubt, „motivierender“ machen sollen. Ziel ist auch eine veränderte „Unterrichtskultur“. Daneben gibt es eine Vielzahl weiterer Forderungen, z.B. die verstärkte Einbeziehung neuer Medien - von der Computerindustrie aus durchsichtigen Gründen begrüßt und befördert -, eine stärkere Leistungsdifferenzierung, Ganztagsbetreuung, usw.

Bei der Fülle der Forderungen, die heute an die Schule gestellt werden, und der dabei verfolgten unterschiedlichen Zielsetzungen besteht die große Gefahr, dass auch für die Konsolidierung des Mathematikunterrichts Maßnahmen isoliert und unkoordiniert ergriffen werden, dass diese Maßnahmen möglicherweise gar nicht stimmig sind und dass sie vor allem nicht den Problemen an die Wurzel gehen. Dieser Gefahr kann man nur entgehen, wenn man sich an einem gut begründeten *stufenübergreifenden* Leitbild orientiert, an dem man verschiedene Maßnahmen bewerten und ausrichten kann. Als ein solches Leitbild für den Mathematikunterricht erscheint dem Autor eine klare Vorstellung davon, was Mathematik *wirklich* ist und welche pädagogischen Möglichkeiten sich daraus für Mathematiklernen ergeben, am besten geeignet. Dieser Ansatz hat sich seit einigen Jahrzehnten auch schon bewährt: Die Fortschritte der Mathematikdidaktik, besonders auch für die Grundschule, sind seit Anfang der achtziger Jahre, also weit vor TIMSS und PISA, von einem bestimmten fachlichen

[1] Gekürzte Fassung des gleichnamigen Artikels in Baum, M. und Wielpütz, H. (Hg.), Mathematik in der Grundschule. Seelze: Kallmeyer 2003, S. 18 - 46

Leitbild bestimmt, das heute noch überzeugender ist als damals. Die stufenübergreifende Perspektive ist dabei *im Interesse der Kinder* zwingend notwendig: Da die deutsche Grundschule traditionell von der Pädagogik geprägt ist und den „Fächern“ oft nur eine untergeordnete Rolle zugemessen wird, muss dabei folgender Punkt besonders beachtet werden: Mit der Entscheidung für ein fachliches Leitbild, das im Folgenden noch genauer zu erläutern und von verzerrten Sichtweisen von „Mathematik“ abzugrenzen sein wird, werden pädagogische Leitvorstellungen von Schule und Unterricht, die der Grundschule aus guten Gründen lieb und teuer sind, keineswegs aufgehoben, ganz im Gegenteil: *Diese pädagogischen Vorstellungen stehen nämlich nicht nur im Einklang mit dem angesprochenen fachlichen Leitbild, sondern ihre praktische Umsetzung wird sogar erst möglich, wenn man sie vom wahren Wesen der Mathematik her interpretiert und mit Leben füllt.* Die so geknüpfte enge Beziehung zwischen Pädagogik und Mathematik ist keineswegs paradox, sondern ergibt sich ganz natürlich, denn der Entscheidung für ein fachlich gut begründetes Mathematikbild liegt das gleiche Menschenbild zu Grunde, das auch den pädagogischen Vorstellungen von Kind, Schule und Unterricht zu Grunde liegt.

Der vorliegende Beitrag ist folgendermaßen gegliedert: Zunächst wird ein neues Bild von Mathematik als „Wissenschaft von Mustern“ vorgestellt und analysiert. Es wird dabei aufgezeigt, dass dieses neue Bild gerade in Lehrplänen für den Mathematikunterricht der Grundschule und in Unterrichtskonzepten, die insbesondere im Projekt Mathe 2000 entwickelt wurden, schon weitgehend umgesetzt ist. Praktische Bespiele dienen im nachfolgenden Abschnitt zur Erläuterung der pädagogischen Möglichkeiten, die sich aus der neuen Auffassung ergeben.

Für ein neues Mathematikbild

> *Die Mathematik ist kein zwischen zwei Deckel gebundenes und mit bronzenen Spangen verschlossenes Buch ...*
> *Ihre Entfaltungsmöglichkeiten sind so unendlich wie die kosmischen Welten, die sich unter dem Blick des Astronomen vervielfältigen. Es ist ebenso unmöglich die Mathematik in zugewiesenen Grenzen oder dauernd gültigen Definitionen einzuschließen - wie das Leben, das in jedem Atom der Materie, in jeder Zelle, in jedem Blatt und in jeder Knospe zu schlummern scheint und stets bereit ist, zu neuen Formen pflanzlichen oder tierischen Lebens aufzubrechen.*
>
> J.J. Sylvester (1814-1897)

Die vorliegenden Erfahrungen mit Lernenden verschiedener Stufen erhärten folgende These:
Das dem traditionellen Mathematikunterricht zu Grunde liegende Mathematikbild erschwert oder versperrt vielen Lernenden den Zugang zur Mathematik.
Dieses Bild lässt sich folgendermaßen kennzeichnen: Mathematische Inhalte erscheinen als logisch festgefügte Systeme von abgeklärten Begriffen, Regeln und Verfahren, die auf bestimmte Klassen von Aufgaben zugeschnitten sind. Der Stoff wird Schritt für Schritt gelernt und portionsweise bis zur möglichst fehlerlosen Reproduktion geübt. Die Unterscheidung zwischen „wahr“ und „falsch“ ist scharf, die Angst inhaltliche oder formale Fehler zu machen entsprechend groß. Eine große Zahl von Lernenden glaubt,

man müsse mathematisch besonders begabt sein um die Mathematik verstehen zu können. Eigene Überlegungen, die zunächst notwendig fehlerbehaftet sind, werden daher vielfach zugunsten der Reproduktion vorgegebener Musterlösungen zurückgestellt. Aus Mangel an Verständnis klammern sich viele Lernende an die äußere Form der Darstellung, hinter denen die Inhalte oftmals verschwinden. Mit dem mathematischen Formalismus geht vielfach ein methodischer Formalismus einher: Die Lernenden durchlaufen die gleichen Schritte in gleicher Weise vom „Einfachen" zum „Schweren". Schwächere erhalten zusätzliche Hilfen und zusätzliches Übungsmaterial. Individuelle Zugänge gelten als unerwünscht, weil es für besser angesehen wird, sich an die im Unterricht besprochenen und eingeübten Verfahren zu halten. Um die Lernenden zu motivieren sich mit der als „trocken" geltenden Mathematik zu beschäftigen, werden in hohem Maße extrinsische Formen der Motivation eingesetzt.

In den letzten Jahrzehnten sind ernsthafte Anstrengungen unternommen worden, um den traditionellen Unterricht, der zu Recht als unnatürlich, ja „unmenschlich", empfunden wird, zu überwinden. In der Grundschule am einflussreichsten war und ist die Bewegung des „offenen Unterrichts", in der sich unterschiedliche Reformansätze zur inhaltlichen, methodischen und organisatorischen Öffnung aufgrund eines veränderten, aktiven Lernbegriffs verbinden (vgl. z.B. Wallrabenstein 1991). Offenheit wird dabei verstanden als

- Offenheit gegenüber den Selbststeuerungskräften, individuellen Lernweisen und Interessen der Kinder
- Offenheit zum sozialen Austausch und zur Kooperation zwischen den Kindern
- Offenheit zur Begegnung und Auseinandersetzung mit der Welt.

Die Praxis des offenen Unterrichts mit vielfältigen Organisationsformen (Wochenplan, Freiarbeit, Projekte) hat ganz zweifellos die Gleichschrittigkeit des Mathematikunterrichts zugunsten individualisierter Lernformen mit einem hohen Grad von Selbststeuerung aufgebrochen. Zum überwiegenden Teil handelt es sich aber nur um eine äußerliche Offenheit. Die verwendeten Lern- und Übungsmaterialien sind die alten geblieben. Am Erscheinungsbild der Mathematik hat sich dadurch nichts geändert.

Andere pädagogische Bemühungen den traditionellen Mathematikunterricht abzulösen gehen in eine Richtung, die Hartmut von Hentig vorgezeichnet hat (von Hentig 1972, 80-81):

> *Mathematik wird entweder nur die Sprache einiger Wissenschaften bleiben und die anderen umso endgültiger von diesen trennen, oder Mathematik müsste so allgemein gemacht werden wie die Muttersprache: Wir müssten lernen, in ihr zu leben, wahrzunehmen, zu denken, zu kommunizieren. Ich glaube nicht, dass das geht. Die vieldeutige schmuddelige Welt, mit der wir es im Alltag zu tun haben, wäre mit dem eindeutigen Instrument der Mathematik nicht zu handhaben. Aber ich glaube, dass das systematische Lernen, das wir der Schule vorbehalten haben, mathematische Denk- und Wahrnehmungsformen in stärkerem Maße aufnehmen kann – vorausgesetzt, wir lernen Mathematik als Sprache, nämlich als ein Verständigungsmittel, und wie eine Sprache, nämlich sprechend, und über Dinge und Sachverhalte und nicht als stummes, gegenstands- und partnerloses*

Glasperlenspiel. Ja, wir müssten die Mathematik mehr noch als andere Wissenschaften entzaubern. Ihr Zauber und ihre Zauberei liegen in dem eigentümlichen Verhältnis zwischen der äußersten Exaktheit des geistigen Instruments und der Inexaktheit der realen Tatbestände, auf die es angewendet wird. Die wissenschaftspropädeutische Chance der Mathematik scheint demnach gerade in dem zu bestehen, was die Mathematiker – bisher – scheuen, wenn nicht verachten: in der Übersetzung von realen Beziehungen in mathematische Sprache und umgekehrt, Sie besteht, wie alle wirklichen Chancen, in einer prinzipiellen Schwierigkeit. Lehrte man in der allgemein bildenden Schule die Mathematik derart als eine „gemischte" und nicht als eine „reine" Wissenschaft, sie hätte Aussicht, eine Gemeinsprache der Erkenntnis zu werden und nicht ein zusätzlichen Mittel der Entfremdung.

Wie der Unterricht, der sich auf eine „gemischte" Wissenschaft Mathematik bezieht, konkret aussehen kann, bleibt in dieser schönen Beschreibung durchaus noch offen. Aus pädagogischer Sicht ist es allerdings verlockend sie konzeptionell so umzusetzen, dass Fachstrukturen zugunsten von Anwendungen der Mathematik im Kontext realer Situationen weitgehend *aufgelöst* werden. In den Richtlinien für den Mathematikunterricht an der Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen ist dieser Weg beschritten worden. Als unausgesprochenes Vorbild diente hier das am Freudenthal-Institut in Utrecht entwickelte Konzept von „Realistic Mathematics Education", jedenfalls so wie es bei uns verstanden wird. Ansätze zur Auflösung des Faches Mathematik (und anderer Fächer) gibt es auch in der Grundschule, sehr weit entwickelt z.B. in der Freinet-Pädagogik.

Sowohl die Bewegung des offenen, „kindorientierten" Unterrichts als auch die Bemühungen um einen "anwendungsorientierten" Mathematikunterricht haben wesentlich dazu beigetragen die Erstarrung des traditionellen Mathematikunterrichts aufzubrechen, und sind als wesentliche Fortschritte anzusehen. Gleichwohl können sie nicht als stufenübergreifende Lösung des Problems angesehen werden, denn die ihnen zu Grunde liegenden Mathematikbilder geben das wahre Wesen der Mathematik nicht angemessen wieder: Die Ansätze des „offenen Unterrichts" lassen das Fach völlig außer Acht, die Ansätze von „Mathematik im realen Kontext" betonen einseitig die Anwendungen der Mathematik.

Auf verfälschten Vorstellungen vom Fach kann man den Unterricht aber nicht aufbauen, insbesondere nicht stufenübergreifend. Wenn daher die Konsolidierung des Mathematikunterrichts gelingen soll, muss das Mathematiklernen von der Frühförderung im Kindergarten an bis hin zur Lehrerbildung auf eine neues *stufenübergreifendes* Bild von Mathematik bezogen werden.

Die Frage „Was ist Mathematik?" wird heute folgendermaßen beantwortet (Devlin 1998, S. 3-4):

In den letzten zwanzig Jahren ist eine Definition [von Mathematik] aufgekommen, der wohl die meisten heutigen Mathematiker zustimmen würden: Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Der Mathematiker untersucht abstrakte „Muster" – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende. Sie können *aus unserer Umgebung an uns herantreten oder aus den Tiefen des Raumes und der Zeit oder aus unserem eigenen Innern.*

In seinem Buch „Das Mathe-Gen" gibt Devlin eine ausführlichere Erläuterung (Devlin 2000, S- 97):

Die Muster und Beziehungen, mit denen sich die Mathematik beschäftigt, kommen überall in der Natur vor: die Symmetrien von Blüten, die oft komplizierten Muster von Knoten, die Umlaufbahnen der Himmelskörper, die Anordnung der Flecke auf einem Leopardenfell, das Stimmverhalten der Bevölkerung bei einer Wahl, das Muster bei der statistischen Auswertung von Zufallsergebnissen beim Roulettespiel oder beim Würfeln, die Beziehungen der Wörter, die einen Satz ergeben, die Klangmuster, die zur Musik in unseren Ohren führen. Manchmal lassen sich die Muster durch Zahlen beschreiben, sie sind „numerischer Natur", etwa das Wahlverhalten der Bevölkerung. Oft sind sie jedoch nicht numerischer Natur; so haben Strukturen von Knoten oder Blütenmuster nur wenig mit Zahlen zu tun.
Weil sie sich mit solchen abstrakten Mustern beschäftigt, erlaubt uns die Mathematik oft, Ähnlichkeiten zwischen zwei Phänomenen zu erkennen (und oft erst zu nutzen), die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben. Wir könnten die Mathematik also als eine Brille auffassen, mit deren Hilfe wir sonst Unsichtbares sehen können – als ein geistiges Äquivalent zu dem Röntgengerät der Ärzte oder dem Nachtsichtgerät eines Soldaten.

Vom Standpunkt des Kindergartens und der Grundschule klingen diese Beschreibungen zunächst einmal sicherlich abgehoben, und werfen unwillkürlich die Frage auf, ob Mathematik als „Wissenschaft von Mustern" für diese Stufen überhaupt eine Relevanz hat. Dass dies tatsächlich der Fall ist, macht vielleicht am besten ein weiteres Zitat deutlich. Es ist der Rede entnommen, die der Physik Richard Feynman 1965 bei einem Vortrag vor Lehrern gehalten hat:

Als ich noch sehr klein war und in einem Hochstuhl am Tisch saß, pflegte mein Vater mit mir nach dem Essen ein Spiel zu spielen. Er hatte aus einem Laden in Long Island eine Menge alter rechteckiger Fliesen mitgebracht. Wir stellten sie vertikal auf, eine neben die andere, und ich durfte die erste anstoßen und beobachten, wie die ganze Reihe umfiel. So weit, so gut. Als Nächstes wurde das Spiel verbessert. Die Fliesen hatten verschiedene Farben, Ich musste eine weiße aufstellen, dann zwei blaue, dann eine weiße, zwei blaue, usw. Wenn ich neben zwei blaue eine weitere blaue setzen wollten, insistierte mein Vater auf einer weißen. Meine Mutter, die eine mitfühlende Frau ist, durchschaute die Hinterhältigkeit meines Vaters und sagte: „Mel, bitte lass den Jungen eine blaue Fliese aufstellen, wenn er es möchte." Mein Vater erwiderte: „Nein, ich möchte, dass er auf Muster achtet. Das ist das Einzige, was ich in seinem jungen Alter für seine mathematische Erziehung tun kann."
Wenn ich einen Vortrag über die Frage „Was ist Mathematik?" halten müsste, hätte ich damit die Antwort schon gegeben: Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern.

Der Begriff des mathematischen Musters eignet sich also sehr wohl als Leitmotiv von den ersten mathematischen Aktivitäten des Kleinkindes bis hin zu den aktuellen Forschungen der mathematischen Spezialisten. Für die mathematische Frühförderung im Vorschulalter sind einfache Zahlen- und Formenmuster gut geeignet (vgl. Müller/Wittmann 2002). Für den Mathematikunterricht der Grundschule bietet sich eine überquellende Fülle von Zahlenmustern, Formenmustern, kombinatorischen und logischen Mustern an, mit denen die Kinder ihre mathematischen Fähigkeiten entfalten und grundlegende Kenntnisse erwerben können. Der Mathematikunterricht der folgenden Stufen kann nahtlos daran anschließen.
Mathematische Muster dürfen nicht als fest Gegebenes angesehen werden, das man nur betrachten und reproduzieren kann. Ganz im Gegenteil: Es gehört zu ihrem Wesen, dass man sie erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen kann. Der Umgang mit ihnen schließt also Offenheit und spielerische Variation konstitutiv ein. Den „streng" erscheinenden Regelsystemen der Mathematik wird dadurch die Schärfe genommen, sie lassen Raum für persönliche Sicht- und Ausdrucksweisen und werden zugänglich für die individuelle Bearbeitung. Gleichwohl werden Offenheit und Individualität durch Regeln gezügelt: Es handelt sich um eine *Offenheit vom Fach aus* (Wittmann 1996).
Anna Susanne Steinweg hat bei ihren Untersuchungen zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses von Kindern (Steinweg 2001) aufgezeigt, dass die Begegnung von Kindern mit mathematischen Mustern als „Spiel" im besten Sinn der Bildungstheorie und der Ästhetik aufgefasst werden kann (Steinweg 2001, 262-263):

> *Muster verzaubern und entzaubern die Mathematik. Mathematik wird erfahrbar in der Schönheit ihrer Strukturen und kann so faszinieren. Mathematik wird durchschaubar in der Logik ihrer Strukturen und kann deshalb hinterfragt werden. Der weit verbreitete Glaube, man könne Kindern die reine Mathematik nicht zumuten, sondern müsse das Fach erst pädagogisch zubereiten, ist unberechtigt. Ganz im Gegenteil: Erst die bewusste Auseinandersetzung mit ihrer Struktur ermöglicht die Entzauberung der ‚Übermacht' Mathematik und bereitet gleichzeitig auch den Boden für ‚bezaubernde Momente' bei der Erforschung von Mustern.*
> *Eine echte – im Sinne von wahrhaftig - Auseinandersetzung mit echter, authentischer Mathematik findet auf der Basis des Spiels statt. Die mathematischen Fragestellungen tragen umso weiter, je mehr versucht wird, ein solches Spiel zu ermöglichen. Das ist so zu verstehen, dass nur die Mathematik in ihrer eigenen Strukturhaftigkeit wirklich ein Anlass zu echter – im Sinne von authentisch – Exploration sein kann. Diese Auseinandersetzung erlaubt es erst, der Struktur auf die Spur zu kommen, den dahinter stehenden Mustern Geheimnisse zu entlocken und nicht zuletzt das Kind als aktiven Lernenden ernst zu nehmen.*

Die Spiele, von denen hier die Rede ist, müssen natürlich von der Flut der „Verpackungen und Spiele" wohl unterschieden werden, die heute als „edutainment" den Markt überschwemmen und nicht der spielerischen Auseinandersetzung mit mathematischen Mustern dienen, ganz im Gegenteil.

Von äußerster Wichtigkeit ist es sich klar zu machen, dass bei der Beschäftigung mit Mustern der reine und der angewandte Aspekt der Mathematik von Anfang an zwei

Seiten ein und derselben Medaille bilden. Dass der Mathematikunterricht wesentlich zur Umwelterschließung beitragen muss, also der angewandte Aspekt der Mathematik fundamental einzubeziehen ist, ist unbestritten. Aber gerade wenn der Unterricht einen wirksamen Beitrag zur Umwelterschließung leisten soll, muss auch die *spielerische Auseinandersetzung* mit bedeutungsvollen elementarmathematischen Fragestellungen *ohne unmittelbaren „Lebensbezug"* voll zur Geltung kommen. Ohne die Erforschung mathematischer Strukturen *für sich selbst*, jenseits unmittelbarer Wirklichkeitsbezüge, hätte sich die Mathematik niemals zu dem breit anwendungsfähigen Werkzeug entwickeln können, das es heute ist. Viele Anwendungsbereiche wurden und werden mit Strukturen „mathematisiert", die z.T. Jahrhunderte vorher von der reinen Mathematik aus innermathematischen Motiven entwickelt worden sind. Der „reine Aspekt" der Mathematik ist somit ein unverzichtbares Element des Mathematiklernens. Wenn er fehlt, wird das Bild der Mathematik verfälscht und der Unterricht kann nicht seinen vollen Bildungswert entfalten. Die Situation ist ähnlich wie im Sport, wo ein breites Training über die eigentlichen Wettkampfanforderungen hinaus einen Überschuss an Verhaltensweisen und Einstellungen erzeugt, der sich im Wettkampf selbst positiv auswirkt, oder wie in der Sprache, wo das freie Fabulieren und die Beschäftigung mit Phantasiewelten wesentliche Elemente sprachlicher Aktivität sind.
Die Unterscheidung zwischen Struktur und Anwendung verweist auf die fundamentale Tatsache, dass die Mathematik nicht durch Abstraktion von der Realität gewonnen wird. Mathematik ist keine Erfahrungswissenschaft wie z.B. die Physik, sondern bildet eine eigene „theoretische" Welt mit eigenen Gesetzen. Dies wird bereits an den natürlichen Zahlen deutlich. Diese Zahlen (ebenso wie die Sprache) kann man zwar zur Beschreibung realer Situationen verwenden, aber sie kommen genauso wenig in der Realität vor wie Wörter: Zahlen sind nicht *empirischer*, sondern *theoretischer* Natur, sie sind gedankliche Konstrukte (Steinbring 1994). Gewiss können Zahlen durch Plättchen „dargestellt" werden, wovon ja in der Grundschule aus guten Gründen ausgiebig Gebrauch gemacht wird. Aber es darf nicht vergessen werden, dass Plättchen eine Doppelnatur haben: Einerseits sind sie konkrete Objekte: man kann sie anfassen wie Steine oder Kastanien. Andererseits sind sie aber vom Menschen gemachte Artefakte, durch deren Anordnungen und Umordnungen Beziehungen zum Ausdruck gebracht werden können. Die Anordnung von Plättchen z.B. in einem 3x3-Muster ist das Ergebnis einer bewussten Operation: Das Muster wird der Anordnung der Plättchen *aufgeprägt*. Wenn ein fertiges 3x3-Muster vorgegeben wird, muss der Betrachter diese Struktur in das Muster „*hineinlesen*", was kein rezeptiver, sondern ein produktiver Akt ist. Wie wir weiter unten sehen werden, läuft derselbe produktive Prozess ab, wenn im Sachrechnen eine reale Situation zu erfassen ist. Auch dabei werden mathematische Strukturen in die Realität „hineingelesen" oder „hineininterpretiert".
Da mathematische Begriffe theoretischer Natur sind, findet die Anschauung bei der Begründung der Mathematik eine prinzipielle Grenze. Wenn man die Anschauung daher als das einzige feste Fundament ansieht und die Kinder zu lange auf sie fixiert, was gerade bei lernschwachen Kindern - in gutem Glauben - häufig geschieht, hilft man ihnen langfristig nicht, sondern legt ihnen Steine in den Weg. Damit eine Auseinandersetzung mit der wahren Mathematik in Gang kommen kann, müssen Kinder schon in der Grundschule auf die theoretische Spur gesetzt werden. Die dabei anfänglich auftretenden Schwierigkeiten liegen in der Natur der Sache. Lehrerinnen und Lehrer dürfen sich dadurch nicht abhalten lassen diesen Weg zu gehen, der im wohlverstandenen Interesse der Kinder liegt. Kinder müssen sich *notwendiger Weise* in

die theoretische Natur der Mathematik einarbeiten, wenn sie Mathematik verstehen wollen.
Die Forderung nach Strukturorientierung muss auch schon in der Grundschule eine Hinführung zum Gebrauch von Symbolen einschließen, denn die Benutzung von Symbolen gehört zum Wesen der Mathematik. Indem diese Symbole aber eingeführt und benutzt werden um mathematische Muster zu beschreiben, erhalten sie Bedeutung. Sie sind keine Hieroglyphen mehr, zu deren Entzifferung der Schlüssel fehlt.

Schließlich muss in diesem Zusammenhang noch darauf hingewiesen werden, dass es falsch ist, Themenstellungen, die von Natur aus innermathematischer Natur sind, auf Gedeih und Verderb in irgendwelche „Rahmenhandlungen" einzukleiden. Unter dem Aspekt Strukturorientierung haben diese Themen ihre eigene Berechtigung. Die Erfahrungen zeigen im übrigen eindeutig, dass Kinder durch innermathematische Themen voll motiviert werden können, wenn diese für eine spielerische Auseinandersetzung zugänglich sind.

Pädagogische Möglichkeiten des neuen Mathematikbildes

„Die Zahlen und ich sind Partner."
Thomas, 10 Jahre

Die mit der Auffassung von Mathematik als „Wissenschaft von (interaktiv erschließbaren, fortsetzbaren und selbst erzeugbaren) Mustern" verbundene Öffnung des Unterrichts *vom Fach aus* anstatt nur von der Unterrichtsorganisation und -methodik aus führt zur folgenden allgemeinen Orientierung des Mathematikunterrichts auch in der Grundschule:

> *Innerhalb sinnvoller Rahmenthemen lassen sich vielfältige Aufgaben zur Erforschung innermathematischer und realer Muster formulieren. Diese Aufgaben können von unterschiedlichen Voraussetzungen aus und auf verschiedenen Wegen bearbeitet werden, sodass individueller Spielraum für Eigentätigkeit besteht. Dabei kann auch die mathematische Sprache wie jede andere Sprache innerhalb gewisser Konventionen flexibel verwendet werden. Das Fach Mathematik ist daher von seinem Wesen her für aktiv-entdeckendes Lernen und kreatives Gestalten genauso zugänglich wie jedes andere Fach. Auch die Motivation kann vom Fach aus erfolgen. Extrinsische Motivationen durch spaßige Verkleidungen sind entbehrlich. In beschränktem Rahmen haben sie natürlich ihre Berechtigung.*

Diese Orientierung ist inzwischen in einer Reihe von Grundschullehrplänen mehr oder weniger deutlich erkennbar. Der unter der Federführung von Heinrich Winter entwickelte Lehrplan des Bundeslandes Nordrhein-Westfalen von 1985, der z.Z. konsequent fortgeschrieben wird, hat hier Maßstäbe gesetzt, insbesondere durch

- die Ausweisung allgemeiner Lernziele (Mathematisieren, kreativ tätig sein, Argumentieren, Darstellen),
- die Etablierung des entdeckenden Lernens als oberstes Unterrichtsprinzip,

- die Forderung nach Anwendungs- *und* Strukturorientierung mit expliziten Verweisen auf arithmetische und geometrische Muster,
- die Forderung nach produktivem Üben.

Eine gute Übersicht gibt Winter 1987. Das neue Bild von Mathematik und Mathematiklernen hat sich aus gutem Grund in der Grundschule bereits weit verbreitet, denn es erlaubt die pädagogische Forderung nach Offenheit mit Inhalt zu füllen und praktisch umzusetzen.
Angesichts der heutigen heterogenen Klassen ist eine pädagogische Besonderheit dieses Ansatzes von überragender Bedeutung: *Die Beschäftigung mit Mustern ist immer auf verschiedenen Niveaus möglich. Muster ermöglichen daher gemeinsame Lernangebote, die von den Kindern nach ihren individuellen Möglichkeiten und Interessen wahrgenommen werden können. Schwächere Kinder können genauso aus dem Unterricht heraus gefördert werden wie leistungsstarke Kinder (natürliche Differenzierung). Alle Kinder kommen zu ihrem Recht und auf ihre Kosten.*
Den Lehrerinnen und Lehrer eröffnen sich auf ihrer Ebene analoge Möglichkeiten für differenzierte Zugänge: Auch sie können die neuen Unterrichtsangebote nach den eigenen Voraussetzungen und Interessen wahrnehmen und sich im Laufe der Zeit intensiver einarbeiten. Wie die Erfahrungen zeigen muss dabei oft erst eine gewisse Scheu vor dem „Neuen“ überwunden und Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit entwickelt werden. Wenn die Bereitschaft zur Veränderung mitgebracht wird, ist der Erfolg garantiert.

Als Demonstration der pädagogischen Möglichkeiten des neuen Mathematikbildes betrachten wir im Folgenden typische Beispiele.

Rechenwege am Beispiel „Zehnerübergang“

Was für das Distributivgesetz gesagt wurde, gilt für Rechengesetze allgemein: Diese Gesetze sind grundlegende Muster, die nicht starr sind, sondern beim Rechnen einen weiten Spielraum lassen, den kreativ zu nutzen zum Wesen der Mathematik gehört. Wenn dieser Spielraum durch methodische Vorschriften eingeengt wird, von denen es die traditionelle Didaktik geradezu wimmelt, wird die Mathematik verfälscht.
Als typisches Beispiel für eine Verfälschung betrachten wir eine „heilige Kuh“ des traditionellen Rechenunterrichts, den sogenannten Zehnerübergang im 1. Schuljahr. Dieses Verfahren verlangt zur Berechnung einer „die Schwelle 10“ überschreitenden Summe zweier einstelliger Zahlen den zweiten Summanden so zu zerlegen, dass „der“ Zehner (zwei Fünfer *nebeneinander*) voll gemacht wird. Dabei gelangt das Assoziativgesetz der Addition zur Anwendung.
Beispiel: $8 + 6 = 8 + (2 + 4) = (8 + 2) + 4 = 10 + 4 = 14$.
Am Zwanzigerfeld lässt sich dies gut demonstrieren (Abb. 1).

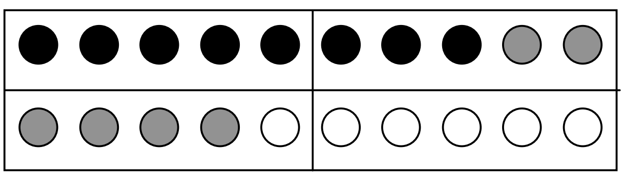


Abb. 1

Gegen diese Rechnung ist überhaupt nichts einzuwenden. Fachlich falsch ist es aber, dieses Verfahren als Standardverfahren vorzuschreiben und andere Rechenwege auszuschließen. Das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz der Addition lassen ja auch noch ganz andere Zehnerübergänge (Plural!) zu.
Beispiele:
$8 + 6 = (5 + 3) + (5 + 1) = (5 + 5) + (3 + 1) = 10 + 4 = 14$.
Hier wird auf andere Weise ebenfalls ein Zehner (zwei Fünfer *untereinander*) vollgemacht, wie man an der Darstellung am Zwanzigerfeld sieht (Abb. 2).

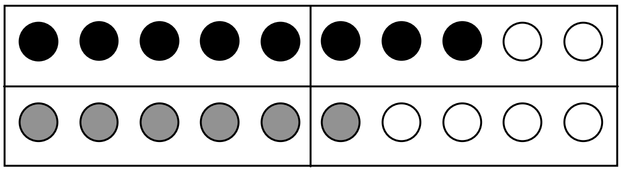


Abb. 2

Unter Benutzung operativer Beziehungen sind auch noch ganz andere Lösungen der Aufgabe 8 + 6 möglich, z.B.
$8 + 6 = 14$, weil $8 + 6 = 7 + 7$
$8 + 6 = 15$, weil $6 + 6 = 12$.
Diese Strategien werden von Kindern benutzt, die die Verdopplungsaufgaben bereits sicher beherrschen.
Für das Verständnis nicht nur des Einspluseins, sondern der halbschriftlichen Addition ganz generell ist es fundamental wichtig zu beachten, dass in der Arithmetik die Rechengesetze festgelegt sind, nicht aber die Rechenwege. Auf der geschickten Nutzung der Rechengesetze je nach Aufgabe beruht das halbschriftliche Rechnen und später in der Sekundarstufe die Algebra. Kinder müssen von Anfang lernen, mit den Rechengesetzen zu „spielen". Dass Kinder diesen Spielraum unterschiedlich nutzen und dass es einzelne Kinder gibt, die ein einziges Verfahren favorisieren, ist kein Grund, „den" Zehnerübergang für alle verbindlich vorzuschreiben.

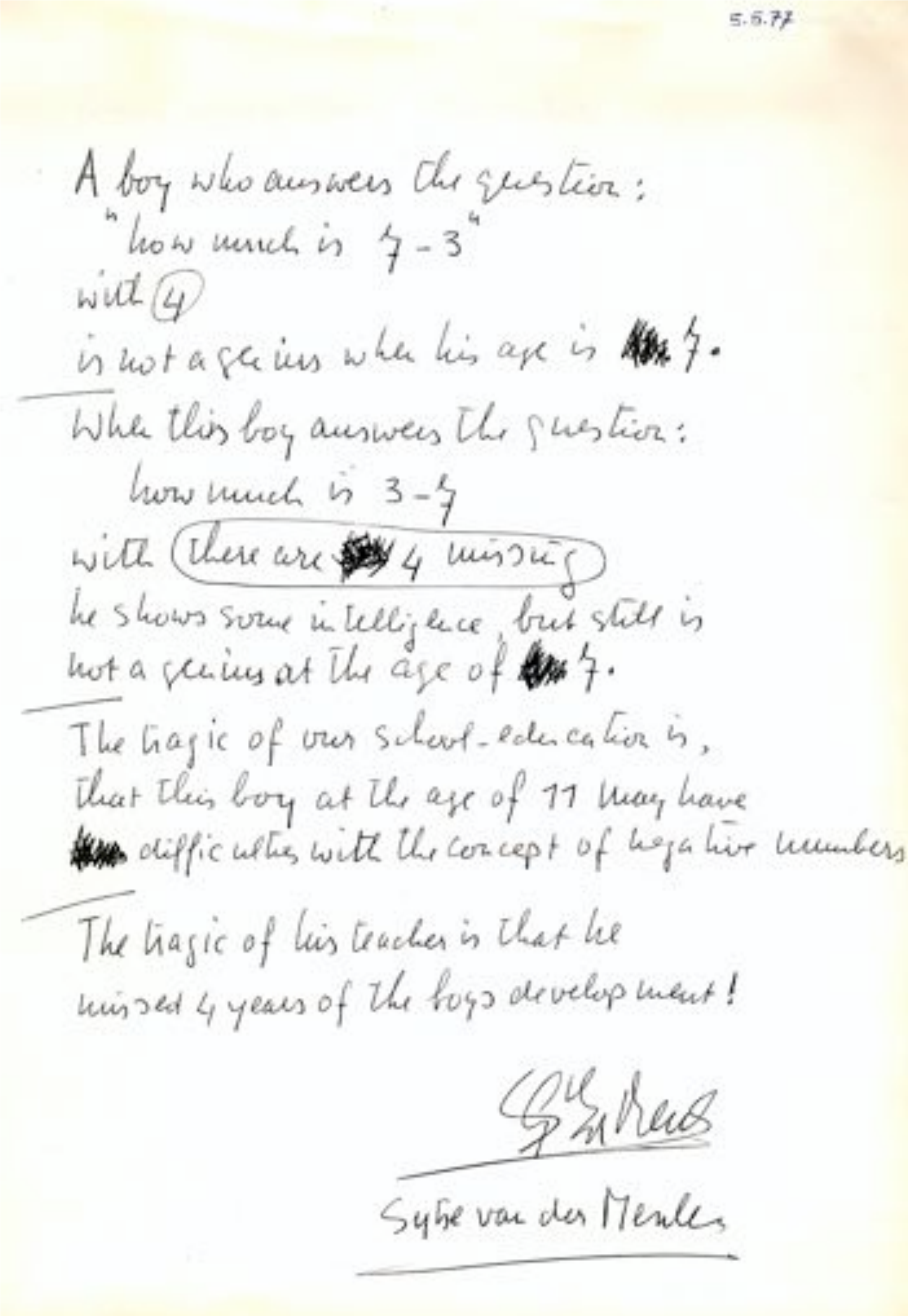
Grenzen der Anschauung am Beispiel Subtraktion im Hunderter

Für die halbschriftliche Subtraktion im 2. Schuljahr gibt es eine Reihe von Rechenwegen, die wieder auf einen unterschiedlichen Nutzung der Rechengesetze beruhen (Abb. 3)

62 – 28 = 34 62 – 20 = 42 42 – 8 = 34 Erst Zehner weg, dann Einer weg	62 – 28 = 34 62 – 8 = 54 54 – 20 = 34 Erst Einer weg, dann Zehner weg	62 – 28 = 34 60 – 20 = 40 2 – 8 = – 6 40 – 6 = 34 Zehner minus Zehner, Einer minus Einer	62 – 28 = 34 62 – 30 + 2 = 34 Vereinfachen	62 – 28 = 34 28 + 2 = 30 30 + 32 = 62 2 + 32 = 34 Ergänzen von 28 bis 62

Abb. 3

Alle Rechenwege mit Ausnahme des dritten lassen sich durch geeignetes „Anschauungsmaterial“ unterstützen. Der Rechenweg „ Zehner minus Zehner, Einer minus Einer“ ist „unanschaulich“ und wird daher im traditionellen Unterricht vermieden oder gar verboten. Ersatzweise werden die Kinder manchmal angehalten 50 – 20 und 12 – 8 zu rechnen, was ein durchaus sinnvoller weiterer Rechenweg ist. Die empirischen Daten zeigen aber deutlich, dass die Kinder in traditionell geführten Klassen den Weg „Zehner minus Zehner, Einer minus Einer“ nichtsdestoweniger nutzen, so wie sie den analogen Weg „Zehner plus Zehner, Einer plus Einer“ bei der Addition nutzen. Da sie sich der Besonderheit dieser Strategie bei der Subtraktion nicht bewusst sind, machen sie dabei leicht Fehler. Im Falle der Aufgabe 68 – 22 = 46 entstehen keine Probleme, denn 60 – 20 = 40 und 8 – 2 = 6. Bei der Aufgabe 62 – 28 rechnen viele Kinder aber spontan ebenfalls 60 – 20 = 40 und 8 – 2 = 6, sie machen die Aufgabe sozusagen „passend“, und gelangen zur falschen Lösung 46.
Es gibt daher zwei gute Gründe, auch diesen Rechenweg als einen unter anderen im Unterricht zu thematisieren:
1. Die Probleme bei der Nutzung dieses Weges müssen besprochen werden, damit die Kinder ihn entweder bewusst anwenden oder ihn, wenn sie noch unsicher sind, wenigstens vermeiden.
2. Was noch viel wichtiger ist: An diesem Rechenweg kann der theoretische Charakter mathematischer Begriffe in folgender Weise exemplarisch verdeutlicht werden. Wenn z. B. von 62 die Zahl 28 wegzunehmen ist, kann dies so geschehen, dass von 60 die Zahl 20 weggenommen wird (Ergebnis 40). Es müssen dann noch 8 Einer genommen werden. Man nimmt zunächst alle vorhandenen Einer, das sind 2, weg und muss dann noch 6 Einer wegnehmen. Dies wird in der Form 2 – 8 = – 6 notiert. Das Zeichen „– 6“ ist eine Merkhilfe dafür, dass noch 6 Einer wegzunehmen sind, die natürlich dann von den verbliebenen 4 Zehnern wegzunehmen sind: 40 – 6 = 34. Auf dieser Stufe ist „– 6“ wohl eine Vorform einer negativen Zahl, aber noch nicht wirklich eine negative Zahl.
Es wird hier in ganz markanter Weise deutlich, dass durch Zahlen und mathematische Gleichungen *Ergebnisse von Handlungen und Beziehungen zwischen Gegenständen* beschrieben werden, nicht die Gegenstände selbst, auch wenn die Handlungen vielfach noch an konkretem Material ausgeführt werden. Die Gleichungen sind auch nicht symbolische Beschreibungen von Bildern, was sich ja schon bei der Subtraktion selbst zeigt, deren bildliche Darstellungen samt und sonders problematisch sind, wie in der Didaktik wohlbekannt ist. Bei der Strategie „Zehner minus Zehner, Einer minus Einer“ wird der Bereich der Anschauung klar verlassen. Das ist aber gerade kein Nachteil, sondern ein Vorteil. Wie wichtig es langfristig gesehen ist, die theoretische Spur frühzeitig aufzunehmen, macht der als Botschaft an die Didaktiker verstandene Eintrag des niederländischen Informatikers Sybe van der Meulen in das Vortragsbuch des Dortmunder Mathematikdidaktischen Kolloquiums vom Jahre 1977 (Abb. 4) deutlich.



5.5.77

A boy who answers the question:
"how much is 7 - 3"
with 4
is not a genius when his age is 7.

When this boy answers the question:
how much is 3 - 7
with there are 4 missing
he shows some intelligence, but still is
not a genius at the age of 7.

The tragic of our school-education is,
that this boy at the age of 11 may have
difficulties with the concept of negative numbers

The tragic of his teacher is that he
missed 4 years of the boys development!

Sybe van der Meulen

Abb. 4

Am Rande sei erwähnt, dass auch die Rückkehr zum Abziehverfahren der schriftlichen Subtraktion von Standpunkt der Mathematik aus auf einem falschen Festhalten an der Anschauung beruht. Der mathematischen Entwicklung der Kinder ist langfristig durch das viel elegantere Ergänzungsverfahren weitaus besser gedient, da dieses voll der theoretischen Natur der Zahlen entspricht. Die Subtraktion in der Form des anschaulichen Wegnehmens von Plättchen verliert bei der Subtraktion im Bereich der negativen Zahlen völlig ihren Sinn, in der Form des Ergänzens ist sie mühelos auf negative Zahlen fortsetzbar. Im Rahmen dieses Beitrags kann auf diese Frage aber nicht weiter eingegangen werden.

Produktion von Lösungswegen

Als Beispiel für einen spielerischen Umgang mit arithmetischen Mustern betrachten wir das Übungsformat „Rechendreiecke“ (Abb. 5).

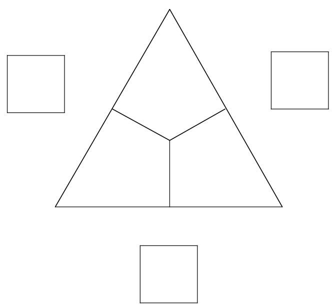


Abb. 5

In die drei inneren und die drei äußeren Felder werden Zahlen eingetragen (innen anfangs in Form von Plättchen). Die einfache Regel lautet: Jede äußere Zahl ist die Summe der angrenzenden inneren Felder.
Rechendreicke erlauben vielfältige Aufgabenstellungen: Wenn die drei inneren Zahlen vorgegeben werden, können die äußeren Zahlen durch Addition ermittelt werden. Wenn ein oder zwei innere und zwei oder eine äußere Zahl vorgegeben sind, werden die restlichen Zahlen durch Addition und Subtraktion ermittelt. Besonders herausfordernd ist es, wenn die drei äußeren Zahlen vorgegeben sind, da dann keine unmittelbare Berechnung der inneren Zahlen möglich ist. Aber die Kinder können probieren. Der folgende Erfahrungsbericht zeigt, wie Larissa im 1. Schuljahr das Rechendreieck in Abb. 6 „geknackt“ hat:

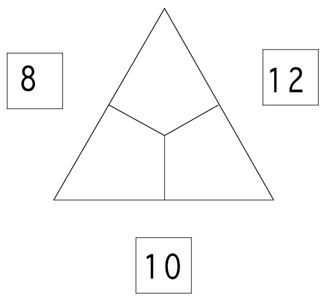


Abb. 6

Larissa schaute sich die Aufgabe eine Zeitlang ruhig an. Offensichtlich „rutschten“ alle ihre Überlegungen an den Zahlen zunächst ab. Dann griff sie zu Plättchen und legte links unten 5, rechts unten 5. Sie überlegte kurz, legte dann einige Plättchen ins obere Feld und ergänzte sie schrittweise bis 7. Offenbar musste sie sich erst klar machen, dass 5 + 7 = 12 ist. Ihre Augen wandten sich dann der linken Seite des Rechendreiecks zu und stockten: 5 + 7 passte nicht zu 8. Larissa überlegte wieder eine Zeitlang und schob schließlich ein Plättchen von links unten nach rechts unten. Sie überlegte wieder und entfernte dann ein Plättchen aus dem oberen Feld. Nach einer weiteren längeren Überlegung schob sie ein weiteres Plättchen von links unten nach rechts unten (sodass links unten jetzt 3, rechts unten 7 Plättchen lagen). Sie überlegte wieder und entfernte dann ein weiteres Plättchen aus dem oberen Feld (jetzt 5 Plättchen). Ein Blick nach links zeigte 5 + 3 = 8. Gelöst! Larissa ballte zur Bestätigung ihrer Leistung ihre Faust.

Der gesamte Lösungsprozess dauerte etwa vier Minuten. Das ist für ein Kind im ersten Schuljahr eine lange Zeit. Es ist davon auszugehen, dass Larissa in dieser Zeit nicht nur viel überlegt, sondern probeweise viele Rechnungen ausgeführt hat. Auch wenn sie in vier Minuten nur eine einzige Rechendreiecks-Aufgabe gerechnet hat, hat sie intensiv das Einspluseins geübt (*immanentes Üben*). Larissa wurde darüber hinaus darin bestätigt, dass man nicht gleich aufgeben muss, wenn man eine Aufgabe nicht gleich kann, sondern dass man sich die Lösung erarbeiten kann.

Fortsetzung und Reparatur arithmetischer Muster

Ein typisches Beispiel hierfür entnehmen wir der ausführlichen Studie von Anna Susanne Steinweg zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern (Steinweg 2000, S. 240). Kindern des 3. Schuljahrs wurden Rechnungen mit Umkehrzahlen vorgelegt (Abb. 7). Die Ergebnisse wurden vorgegeben, da die Interviews nicht durch falsche Ergebnisse beeinträchtigt werden sollten. (Im Unterricht würde man die Ergebnisse selbstverständlich zuerst berechnen lassen.) Die Kinder wurden aufgefordert zu berichten, was ihnen auffällt.

957	846	524	694
– <u>759</u>	– <u>648</u>	– <u>325</u>	– <u>496</u>
198	198	199	198

Abb. 7

Abb. 8 zeigt einen Ausschnitt aus einem Interview (S steht für Schüler, I für Interviewerin).

S *Da ist die 9 am Anfang, da ist die 9 am Ende. Die 5 ist in der Mitte, die 5 ist auch in der Mitte. Da ist die 7 am Anfang und da, da ist sie am Ende.*
I *Mhm, bei den anderen auch?*
S *Da ist die 8 am Anfang, da ist die 8 am Ende. Da ist die 6 am Ende, da ist die 6 am Anfang. Und die 4 ist in der Mitte.*
I *Die bleibt, ne?*
S *Ja. Die 5 ist am Schluss und sie ist am Anfang ...* (lächelt) *... die ist falsch!*

I *Ja, können wir die denn reparieren, können wir sie richtig machen? Welche Zahl müssen wir ändern?*
S *Die 4.*
I *Was muss denn die 4 sein für eine Zahl?*
S *Die 3.*
Abb. 8

Die verbesserte Aufgabe 524 – 325 hat das Ergebnis 99, also ein anderes Ergebnis als 198. Andere Kinder verbesserten die dritte Aufgabe so, dass das Ergebnis 198 entstand, z.B. zu 524 – 326 = 198. Dies ist nicht etwa als „falsch" zu werten, sondern zeigt nur, dass Muster unterschiedlich gesehen werden können. Zu einer Reihe vorgegebener Rechnungen gibt es grundsätzlich nicht **das** passende Muster, obwohl es in den meisten Fällen naheliegt, ein bestimmtes Muster zu wählen.
Wie auch immer ein Muster festgelegt wird, es ist eine schöne Aufgabe für die Kinder, weitere Aufgaben zu finden, die zu diesem Muster passen („offenes" Üben).

Erfindung von Mustern

Übungsformate können auch als Formulare angesehen werden, die frei zu gestalten sind. Dabei können die Kinder ihren eigenen Vorstellungen folgen. Schöne Beispiele mit „Zahlenmauern" aus der Mitte des 1. Schuljahrs haben Elmar Hengartner und Elisabeth Hubacher zusammengetragen (Hengartner/Hubacher 1999). Abb. 9 zeigt die Zahlenmauern von Shelly, die sich mit einer Mauer mutig über 20 hinaus wagt. Silvana (Abb. 10) verfolgt konsequent ein bestimmtes Muster, das eine gute Vorbereitung auf das Einmaleins ist.

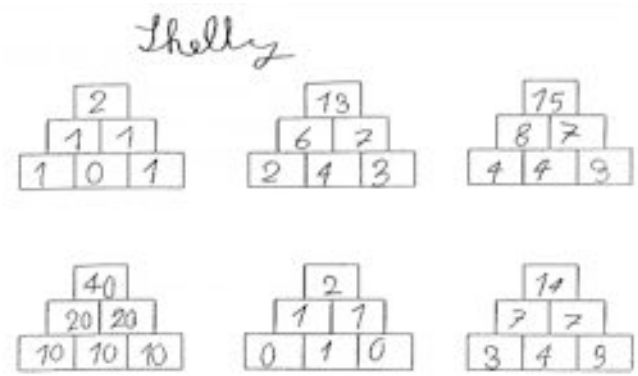


Abb. 9

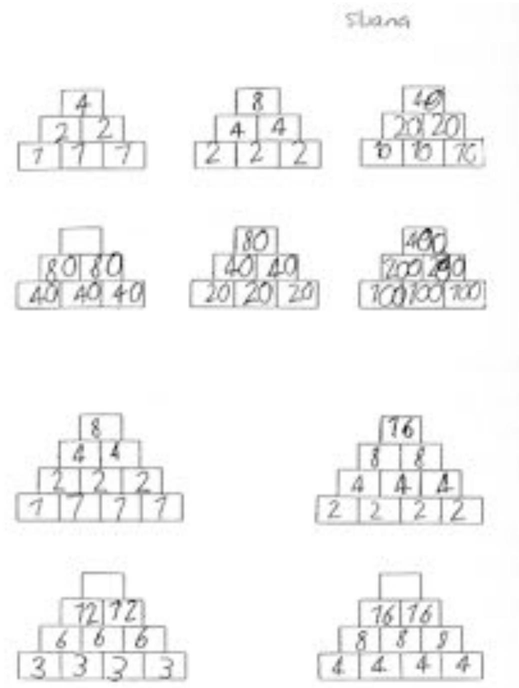


Abb. 10

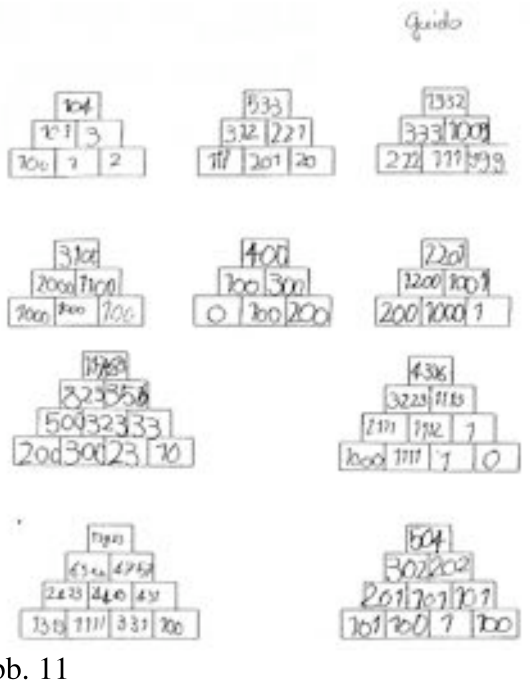


Abb. 11

Abb. 11 zeigt die Zahlenmauern von Guido, über den die Autoren folgendes schreiben (Hengartner/Hubacher 1999, S. 71):

> *Guido war der schnellste Schüler der Klasse. Seine Zahlenmauern verraten eine große Experimentierlust. Souverän rechnete er mit Einern, gemischten Zehner-, Hunderter- und Tausenderzahlen. Seine Mauern weisen auf ein ausgebildetes Verständnis für die dekadischen Strukturen im Zahlaufbau und dokumentieren eine erstaunliche Fähigkeit des halbschriftlichen Addierens.*

Es wird an diesem Beispiel deutlich, wie Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen an einer *gemeinsamen* Aufgabe arbeiten können (natürliche Differenzierung). Das Übungsformat „Zahlenmauern“ bietet ihnen einerseits eine Begrenzung und eine gemeinsame Bezugsbasis für den sozialen Austausch. Gleichzeitig lässt es ihnen aber einen großen Spielraum. Leistungsstarke Kinder können sich mathematisch voll ausleben, ohne andere Kinder „zuzudecken“.

Erzeugung von Aufgaben

Dass Muster den Kindern (und den Lehrerinnen und Lehrern) einen Rahmen bieten sich selbst (ohne Kopiervorlagen!) beliebig viele Aufgaben zu stellen und dabei bestimmten Fragestellungen nachzugehen, zeigt das folgende Beispiel aus dem 3./4. Schuljahr (Wittmann/Müller 1992, 36-37).
Zur Verfügung stehen Karten für die neun Ziffern 1, ..., 9. Die Kinder sollen daraus drei dreistellige Zahlen bilden und die Ergebnisse berechnen. Fragen: Welche Ergebnisse sind möglich? Welches ist die größte Zahl, die man erreichen kann, welches die kleinste? Kann man 700, 800, 900, 1000, 1100, usw. erreichen?
Die Anordnung der neun Ziffern in einem 3x3-Schema ist als Handlungsfeld anzusehen, auf dem die Kinder nach Herzenslust operieren können. Abb. 12 zeigt einige Aufgaben.

416	415	415	514	514	512
752	762	862	862	863	863
+389	+389	+379	+379	+279	+479
1557	1566	1656	1755	1656	1854

Abb. 12

Dabei können sie (aber müssen nicht!) entdecken und ausnutzen, wie sich ein Ergebnis ändert, wenn Ziffernkarten ausgetauscht werden. Wenn z.B. eine Ziffer der Einerspalte mit einer größeren (kleineren) Ziffer der Einerspalte vertauscht wird, wird das Ergebnis kleiner (bzw. größer). Genauer: Wenn der Unterschied zwischen den Ziffern 1 beträgt, ändert sich das Ergebnis um 9, wenn er 2 beträgt, um 18, usw. Die Kinder finden für das Ergebnis 900 Lösungen (sogar viele verschiedene), für 800 und 1000 aber keine. Nur 801 und 999 sind erreichbar. Einige Kinder werden vielleicht entdecken, dass erreichbare Zahlen immer im Neunerabstand aufeinanderfolgen. Diese Beziehung liefert auch eine sehr gute Selbstkontrolle (s. dazu weiter unten).
Auch diese Aufgabe ermöglicht eine natürliche Differenzierung: Schwache Kinder, die langsam rechnen und den bestehenden Spielraum nur wenig nutzen, üben genauso die schriftliche Addition wie starke Kinder, die vielleicht sogar Argumente dafür beibringen können, warum die möglichen Ergebnisse im Neunerabstand aufeinanderfolgen. (Wenn man sich überlegt hat, dass die Vertauschung von Ziffern immer ein Vielfaches von 9 bewirkt und ausnutzt, dass z.B. 459 + 168 + 192 = 900 eine Neunerzahl liefert, hat man den Beweis schon.)
Wie oben schon betont, besteht auch für Lehrerinnen und Lehrer keinerlei Zwang diese Aufgabe voll auszureizen. Auch für sie ist die Aufgabe ein Angebot, von dem sie selbst entscheiden können, inwieweit sie es annehmen wollen und wie weit sie damit im Unterricht mit den Kindern gehen wollen.

Echte Selbstkontrolle

Im traditionellen Unterricht haben sich Formen der Ergebniskontrolle (Prüfziffern, Prüfwörter, Lösungsschlüssel, usw.) eingebürgert, die fälschlicherweise als „Selbstkontrolle“ deklariert werden, obwohl es sich tatsächlich um Fremdkontrolle handelt, wie bereits Wilhelm Oehl klargestellt hat (Oehl 1962, 33-34):

> *[Wir müssen] zwischen Fremdkontrolle und Selbstkontrolle unterscheiden. Sagt der Lehrer dem Schüler: „Diese Aufgabe ist falsch", so handelt es sich einwandfrei um Fremdkontrolle. Aber auch in allen andern Fällen, in denen irgendein Hilfsmittel, etwa ein Ergebnisheft oder eine Prüfzahl ... dem Schüler sagt: „Diese Aufgabe ist falsch", haben wir es mit Fremdkontrolle zu tun. Das richtige Ergebnis (im Ergebnisheft) oder die Prüfzahl sind von einem „Fremden" gegeben worden. Handelt es sich um eine Aufgabe aus dem praktischen Leben oder irgendeine Aufgabe, die außerhalb des Rechenbuchs gestellt wurde, so entfallen solche Hilfen; der Schüler muß jetzt durch eigenes Nachdenken, durch eigenes Anwenden mathematischer Hilfsmittel die Entscheidung treffen: falsch oder richtig. Selbstkontrolle ist immer Individualkontrolle ohne jede fremde Hilfe. Die echte Selbstkontrolle muß auf jede Aufgabe in gleicher Weise anwendbar sein und nicht nur auf die Aufgaben des Rechenbuches. Diese begriffliche Klarstellung ist notwendig, weil sich in den zurückliegenden Jahren Kontrollmethoden in unsern Schulen unter dem anspruchsvollen Etikett „Selbstkontrolle" (Prüfzahlen) eingebürgert haben, die in Wirklichkeit Fremdkontrollen sind. ... Die Selbstkontrolle verlangt von ihrem Begriff her eine erhöhte geistige Urteilskraft. Ich soll mathematische Beziehungen kontrollieren, d. h. doch, ich soll von einem übergeordneten Standpunkt aus, kraft meiner Einsicht in die Zusammenhänge, ein gültiges Urteil über richtig oder falsch abgeben. Jeder Kontrolle muß ein Denkakt zugrunde liegen, der die Kontrollmaßnahmen auslöst.*

Mathematische Muster, die Zusammenhänge herstellen, ermöglichen eine mathematisch und pädagogisch sinnvolle Form der Selbstkontrolle: Ergebnisse, die nicht passen, erwecken den Verdacht falsch zu sein (vgl. die Neunerzahlen bei dem vorhergehenden Beispiel). Als typisches Beispiel betrachten wir eine Übungsform für die halbschriftliche Subtraktion im 2. Schuljahr etwas genauer: Differenzen von Umkehrzahlen (Wittmann/Müller 1990, S. 96-98, Wittmann/Müller u.a. 2000, S. 40-41).
An die Tafel werden Aufgaben geschrieben wie

81 – 18 =	65 – 56 =	52 – 25 =	61 – 16 =

Aufgabe der Kinder ist es zunächst das Bildungsgesetz dieser Aufgaben zu erkennen, wozu evtl. noch weitere Aufgaben vorgegeben werden müssen. Wenn das Gesetz erkannt und besprochen ist, können die Kinder selbst Aufgaben bilden und ausrechnen. Die Ergebnisse werden anschließend verglichen und geordnet. Da nur Vielfache von 9 als Ergebnisse möglich sind, können falsche Rechnungen erkannt und korrigiert werden (von dem seltenen Fall abgesehen, dass trotz falscher Rechnung ein richtiges Ergebnis herauskommt). Der Beweis für dieses Muster lässt sich mit der Strategie „Zehner minus

Zehner, Einer minus Einer“ mühelos erbringen, wie aus folgenden Rechenbeispielen in Abb. 13 ersichtlich ist:

81 – 18 = 70 – 7 = 63 = 7·9	53 – 35 = 20 – 2 = 18 = 2·9	64 – 46 = 20 – 2 = 18 = 2·9
80 – 10 = 70	50 – 30 = 20	60 – 40 = 20
1 – 8 = – 7	3 – 5 = – 2	4 – 6 = – 2

Abb. 13

Man erkennt an den Zwischenrechnungen, dass das Ergebnis gleich der Differenz der Ziffern mal 9 ist. Im Nebensatz sei angemerkt, dass es gerade der *theoretische* Charakter der Rechenstrategie „Zehner minus Zehner, Einer minus Einer“ ist, der Beweise ermöglicht.

Geometrische Muster

Auch die Geometrie der Grundschule weist eine große Vielfalt von Mustern auf, die für einen experimentellen Zugang genutzt werden können. Als Beispiele seien genannt:

- Herstellung der Platonischen Körper im 4. Schuljahr mit der Zeichenuhr (Winter 1986, nach einer Idee von Rudolf Keßler)
- Erforschung der Spiegelsymmetrie mit Spiegelkarten (Spiegel 1996, Müller/Wittmann 1997)
- Herstellung von Origami-Formen (Wollring 2002)

Sachrechnen als Modellbilden

Die neuen Ansätze zum Sachrechen passen in ganz besonderer Weise zu dem Konzept „Muster“. Heinrich Winter hat in einer Reihe von grundlegenden Beiträgen die Bedeutung des Modellbildens für das Sachrechnen herausgearbeitet (vgl. z.B. Winter 1985, 1994) und viele substanzielle Beispiele für die Erschließung realer Situationen entwickelt, von denen eines schöner ist als das andere (Winter 1985), z.B. „Wie lange noch bis Heiligabend?“, „Erste Zähne – zweite Zähne“, „Schuhe vom Versandhaus“, „Wiegen ohne Waage“, „Jumbo Jet“. Das Besondere an diesen Beispielen ist, dass dabei der Modellbildungsprozess voll durchlaufen wird: Es müssen Fragen gestellt, Daten beschafft, die Daten in einem Modell verbunden werden, im Modell sind Folgerungen zu ziehen, und die Ergebnisse müssen am Schluss interpretiert werden.
Winter sieht Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und der Mathematik. Bei einem Modellbildungsprozess müssen im Kopf des Modellbildners anwendungsfähige mathematische Muster bereits vorhanden sein, aus denen ein passendes Modell ausgewählt oder zusammengesetzt werden kann. Diese Sichtweise erfordert wie schon im zweiten Abschnitt erwähnt eine Trennung zwischen Mathematik und Welt: Anwendungsorientierung setzt Strukturorientierung voraus (und umgekehrt natürlich auch). Durch die Strukturorientierung wird sozusagen ein Vorrat möglicher Modelle bereit gestellt, auf den bei der Umwelterschließung zurückgegriffen werden kann.
Um traditionelle Formen von Sachaufgaben zu überwinden, bei denen „der Aufgabentext bereits derartig windschnittig auf eine bestimmte rechnerische Prozedur zugeschnitten ist, dass eine Auseinandersetzung mit der Sache kaum notwendig

erscheint“ (Winter 1994, S. 10), wurden im letzten Jahrzehnt in der Mathematikdidaktik verschiedene Wege eingeschlagen:

- Einflechtung von Aufgaben in Sachtexte (Erichson 1991). Das Buch „Von Lichtjahren, Pyramiden und einem regen Wurm“ (Erichson 1990) war in dieser Richtung stilbildend.
- Anregung von Kindern Sachaufgaben selbst zu entwickeln und zu formulieren (Dröge 1991)
- Einbeziehung lebensweltlicher Situationen in das Sachrechnen (vgl. z.B. Franke 1995/1996)
- Ablösung fester Lösungsschemata durch flexible Lösungsstrategien und freiere Formen der Aufgabenbearbeitung (Müller 1995)
- Herausforderung der Kinder durch ausgesprochen anspruchsvolle Textaufgaben im realem und spielerischen Kontext, die im Unterricht nicht vorbereitet worden sind (Rasch 2002).

Es ist zu erwarten, dass in den kommenden Jahren verstärkt das Internet genutzt wird, um die Authentizität und Aktualität der Daten und Aufgaben weiter zu verstärken.

Schlusswort

Im Mathematikunterricht der allgemein bildenden Schule generell und in der Grundschule ganz besonders geht nicht um die Mathematik an sich, sondern um Mathematik im pädagogischen Kontext. Von dieser Position aus sollen Lehrerinnen und Lehrer der Grundschule durch diesen Beitrag angeregt werden, ihren Mathematikunterricht als „Allrounder“, nicht als „mathematische Spezialisten“ weiterzuentwickeln, so wie es in anderen Fächern schon weitgehend getan haben.
Um diese pädagogische Position bewusst zu stärken und den Blick noch mehr zu weiten erscheint es abschließend passend, einen der größten zeitgenössischen Mathematiker zu Wort kommen zu lassen: Enrico Bombieri, geb. 1946, der bereits im Alter von 28 Jahren mit der Fields-Medaille ausgezeichnet wurde (die als eine Art Nobelpreis für Mathematik alle vier Jahre verliehen wird). Bombieri beschließt seine Antwort auf die Frage eines Kindes „Warum ist 1+1=2?“ wie folgt (Stickel 2002, S. 194):

> *„Viele Menschen mögen es nicht, wenn etwas so streng ist, wie dieser kleine Beweis* [für 1+1=2]. *Andere dagegen spricht das logische Denken sofort an. Wenn du zu ihnen gehörst, dann suche dir gute Bücher aus, die vor allem Spaß machen und dich anspornen, noch mehr wissen zu wollen – mehr, als warum 1+1=2 ist. Denn die Mathematik ist so vielfältig wie ein Garten mit unzähligen Blumen und Pflanzen. Doch vergiss nie: So schön diese Wissenschaft auch ist, sie ist nicht alles. Es gibt wichtigere Dinge auf der Welt, zu allererst die Menschlichkeit; ich selbst bin Vater einer behinderten Tochter. Sie ist zwar taub und geistig zurückgeblieben, aber ein wunderbares Wesen. Von ihr habe ich mehr über das Leben gelernt als von allen mathematischen Theorien zusammen, die ich seit meiner Kindheit studiere. Meine Tochter ist das Beste, was mir in meinem Leben passieren konnte.“*

Literatur

Bombieri, E.: Warum ist 1+1 = 2? In: Stickel, Bettina (Hrsg.), Kinder fragen, Nobelpreisträger antworten. München: Heyne 2002, 186 – 195

Devlin, K.: Muster der Mathematik. Heidelberg: Spektrum 1998

Devlin, K.: Das Mathe-Gen. Stuttgart: Klett-Cotta 2000

Dröge, R.: Kinder schreiben Sachaufgaben selbst. Sachrechenunterricht an Situationen orientiert. Grundschulzeitschrift 42/1991, 14-15

Erichson, Ch.: Von Lichtjahren, Pyramiden und einem regen Wurm. Erstaunliche Geschichten, mit denen man rechnen muss. Hamburg. Verlag für pädagogische Medien 1990

Erichson, Ch.: Sachtexte lesen, mit denen man rechnen kann. Grundschulzeitschrift 48/1991, 22-25

Feynman, R.: What is Science? The Physics Teacher 9/1969

Franke, M.: Auch das ist Mathe! Vorschläge für projektorientiertes Unterrichten. 2 Bde. Köln: Aulis 1995/1996

Gellert, U.: Vorstellungen angehender Grundschullehrerinnen von Schülerorientierung. Eine Analyse von Unterrichtskozeptionen im Kontext universitärer Lehrerbildung. Journal für Mathematikdidaktik 20 (1999), H.2/3, S. 113-137

Grassmann, M./Mirwald, E./Klunter, M./Veith, U.: Arithmetische Kompetenzen von Schulanfängern. Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 23, H. 7, 1995, 302-321

Hengartner, E./Röthlisberger, H.:Rechenfähigkeit von Schulanfängern. In: Brügelmann, H., Balhorn, H. und Füssenich, I.: Am Rande der Schrift. Zwischen Sprachenvielfalt und Analphabetismus. Lengwil: Libelle Verlag 1995, 66-86

Hengartner, E./Hubacher, E.: Kinder entwickeln vielfältige Aufgaben: Zahlenmauern (1. Klasse). In: Hengartner, E.: Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht. Zug/CH: Klett und Balmer 1999, 69-71

v. Hentig, H.: Magier oder Magister? Stuttgart: Klett-Cotta 1972

Hospesová, A. Kurina, F. und Tichá M.: The World of Mathematics, Emerging from the Child's Experience. Paper submitted to SEMT 2001, Prague.

Kaiser, G. und Henn, H.W.: Mathematik – ein polarisierendes Schulfach, Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 3/2001, 359-380.

Müller, G.N.: Kinder rechnen mit der Umwelt. In: Müller, G.N./Wittmann, E.Ch. (Hg.): Mit Kindern rechnen. Frankfurt a.M.: Grundschulverband 1995, 42-64

Müller, G.N./Wittmann, E.Ch.: Spiegeln mit dem Spiegelbuch. Düsseldorf, Stuttgart: Klett 1997

Müller, G.N., Steinbring, H. und Wittmann, E.Ch.: Jenseits von Pisa. Bildungsreform als Unterrichtsreform. Ein Fünf-Punkte-Programm aus systemischer Sicht. Velber: Kallmeyer 2002

Müller, G.N./Wittmann, E.Ch.: Das kleine Zahlenbuch. Band 1: Spielen und Zählen. Velber: Kallmeyer 2002

Oehl, W.: Der Rechenunterricht in der Grundschule. Hannover: Schroedel 1962

Picker, S. and Berry, J.: Investigating Pupils‘ Images of Mathematics. Educational Studies in Mathematics 43 (2000), 65-94

Rasch, R,: Denkaufgaben für freies Arbeiten im Grundschulmathematikunterricht. 42 herausfordernde Probleme für die Klassen 1 bis 4 mit Lösungsbeispielen und Lösungsdiskussionen von Kindern sowie Hinweisen für den Einsatz im Unterricht. Velber: Kallmeyer 2002

Spiegel, H.: Spiegeln mit dem Spiegel. Düsseldorf, Stuttgart, Leipzig: Klett 1996

Steinbring, H.: Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule – Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen. Mathematische Unterrichtspraxis IV/1994, 7-19

Steinweg, A.S.: Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Münster: LIT 2001

Wallrabenstein, W.: Offene Schule – Offener Unterricht. Ratgeber für Eltern und Lehrer. Reinbek: Rowohlt 1991

Winter, H. Sachrechnen in der Grundschule. Probelematik des Sachrechnens, Funktionen des Rechnens, Unterrichtsprojekte. Bielefeld: Cornelsen 1985

Winter, H.: Von der Zeichenuhr zu den Platonischen Körpern. mathematik lehren 17/1986, 12-14

Winter, H.: Mathematik entdecken. Neue Ansätze zum Mathematikunterricht in der Grundschule. Frankfurt a.M.: Scriptor 1987

Winter, H.: Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. Grundschule 3/1994, 10-13.

Wittmann, E.Ch.: Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. Grundschulunterricht 43 (1996), H. 6, 3-7

Wittmann, E.Ch,/Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Düsseldorf, Stuttgart. Leipzig: Klett 1990/1992

Wittmann, E.Ch./Müller, G.N. u.a., Das Zahlenbuch. Lehrerband 2. Leipzig: Klett 2000

Wollring, B.: Faltbilderbücher, Faltgeschichten und Faltbildkalender. Arbeitsumgebungen zur ebenen Papierfaltgeometrie fuer die Grundschule. Grundschulzeitschrift 138/2000, S. 26, 43-47