mathe 2000

von U. Kirchgraber*

Nehmen Sie, meine Damen und Herren, ein gleichseitiges Dreieck und fällen Sie vom Mittelpunkt die Lote auf die Dreiecksseiten: Es entstehen drei Vierecke. Jeweils zwei grenzen aneinander und an eine gemeinsame Dreiecksseite, siehe Abbildung 1.

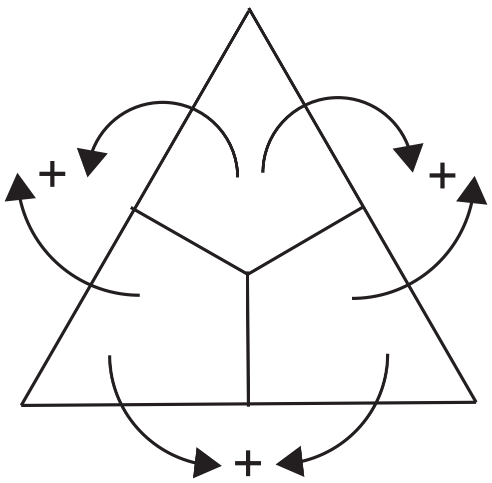

Abbildung 1: Die Denkfigur des Rechendreieicks

Nun kann man, wenn man mag, die Vierecke mit Zahlen belegen. Diese Zahlen werde ich den *Input* nennen. Weiter kann man festlegen, dass jeder Dreiecksseite die Summe der Zahlen in den beiden angrenzenden Vierecken zugeordnet wird. Diese Zahlen nenne ich den *Output*.

Bei gegebenem Input den Output zu berechnen, ist eine einfache Aufgabe für den, der addieren kann.

Schwieriger ist es, wenn man nur einen *Teil des Inputs* und dafür aber einen *Teil des Outputs* kennt. Die Frage, die sich dann stellt, lautet: Lässt sich der Input, der unbekannt ist, bestimmen? Im *Extremfall* ist der *gesamte Output* gegeben und es ist der *gesamte Input* zu ermitteln.

Dieses interessante Problem findet sich schon im *Zahlenbuch* für die erste Klasse.

*Professor emeritus, Departement Mathematik, ETH Zürich

Von einem etwas höheren mathematischen Standpunkt aus könnte man die Aufgabe als sogenanntes *Inverses Problem* bezeichnen.

Inverse Probleme treten auf, wenn eine *Ursache-Wirkungsbeziehung* vorliegt. Kennt man die Ursache und soll die Wirkung bestimmen, ist die Rede vom *direkten Problem.* Ist umgekehrt die Wirkung bekannt und soll die Ursache *rekonstruiert* werden, spricht man vom *inversen Problem.* Ein berühmtes inverses Problem lautet: Kann man die Form einer Trommel hören?

Von direkten und inversen Problemen wissen die Erstklässler natürlich nichts, und das ist ja auch gut so. Wer sich ein wenig auskennt weiss: Inverse Probleme zu lösen ist im Allgemeinen nicht einfach.

In *mathe 2000* wird den Kindern empfohlen, das Problem durch *Probieren* zu lösen. Es ist gewiss interessant zu *beobachten*, wie die Kinder mit der Fragestellung und der Anleitung *Probieren* umgehen.

Ich vermute, dass einige *wild* herum experimentieren.

Andere merken vielleicht folgendes. Wenn man zum Beispiel in das untere Viereck links eine *Versuchszahl* einsetzt, kann man die Zahl im oberen Viereck berechnen und dann daraus die Zahl im unteren Viereck rechts. Dann kommt der Test: *Ergibt die Summe der Zahlen in den beiden unteren Vierecken das vorgeschriebene Ergebnis an der unteren Dreiecksseite?*

Damit kann man die Aufgabe wie folgt durch trial and error lösen: Man variiert die Versuchszahl so lange bis die *Zielzahl getroffen* wird.

Aus nahe liegenden Gründen kann man dieses Vorgehen als *Schiessverfahren* bezeichnen. Es ist eine Variante der Methode des "falschen Ansatzes".

Vielleicht beobachten einige Kinder, dass eine Erhöhung der Versuchszahl im linken unteren Viereck um 1 eine Erhöhung der Summe der Zahlen in den unteren beiden Vierecken um 2 nach sich zieht. Das ist a) *leicht zu begründen* und b) *nützlich* für die Lösung der Aufgabe: Man hat nun ein *systematisches Lösungsverfahren* in der Hand.

Mathematisch kann man sagen: Entdeckt wurde eine *kontextbezogene, inhaltlich-anschauliche* Reduktion eines linearen Gleichungssystems aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten auf eine einzige lineare Gleichung in einer Unbekannten, die sich im Kopf lösen lässt.

Besonders pfiffige Kinder können vielleicht entdecken, dass die *Summe der Input-Zahlen* gerade halb so gross ist, wie die *Summe der Output-Zahlen.* Wenn man das erkannt hat, hat man ein überaus elegantes Verfahren zur Lösung des Problems.

Aus dieser Erkenntnis folgt dann überdies, dass die Summe der Output-Zahlen *gerade* sein muss, damit die Input-Zahlen *ganz* sind. Sollen die Input-Zahlen *natürlich* sein, muss eine Art *Dreiecks-Ungleichung* gelten, das heisst die Summe von je zwei Output-Zahlen muss grösser als die dritte sein.

Diese paar Bemerkungen zeigen, wie reichhaltig Rechendreiecke sind.

Auf den ersten Blick ist es ein *Spiel*, das Grundschulkinder anspricht und anregt.

Aber es gibt eine tiefere Schicht auf der sich überraschende Querverbindungen zeigen – ich habe auf den Bezug zu Inversen Problemen hingewiesen.

Aus didaktischer und unterrichtlicher Sicht bietet es eine ganze Skala von Möglichkeiten, vom naiven Probieren bis zur Entdeckung und Sicherung von durchaus substantiellen Einsichten.

Die Aufgabe trägt zur *mathematischen Geschmacksbildung* bei, ein Aspekt, dem nicht nur im Mathematik-Unterricht, sondern nicht selten bis in die mathematische Forschung hinein zu wenig Rechnung getragen wird.

A propos *Reichhaltigkeit*. Das Thema Rechendreiecke hat auch einen *Anwendungsbezug*! Man kann die Problemstellung als "Urmodell" für die *Computer-Tomografie* sehen. Abbildung 2 verdeutlicht das.

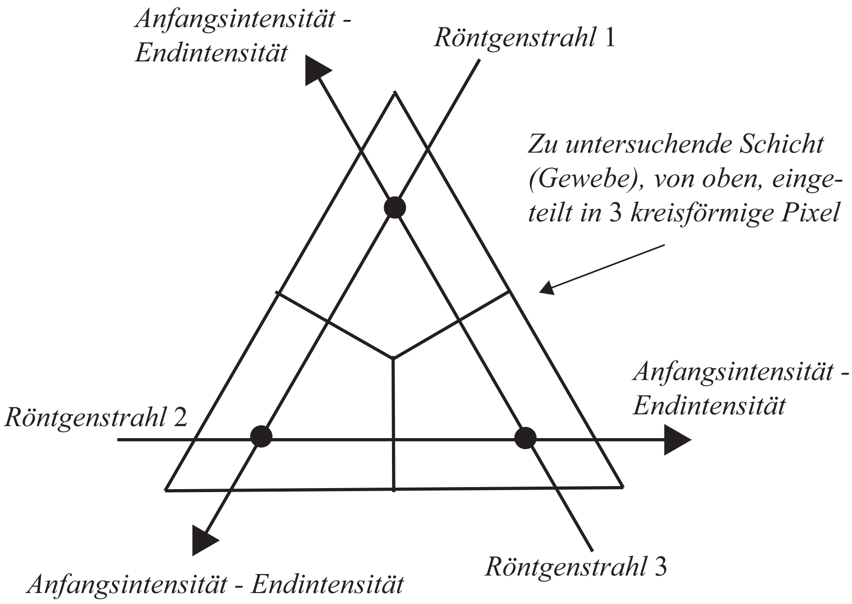

Abbildung 2: Rechendreieicke und Computer-Tomografie

Meine Überlegungen bis dahin beziehen sich auf die eine Seite 103 in meiner Ausgabe von Zahlenbuch 1.

Ein Uninformierter könnte vielleicht vermuten, ich hätte einfach eine einsame Perle heraus gefischt.

Aber das ist nicht so.

mathe 2000 ist von A bis Z aus einer *genuin mathematischen Sicht heraus konzipiert*, allerdings so *vielschichtig*, dass es den Einmaleinsschützen gefangen nimmt, ebenso wie den Fachmann. Es erledigt den ebenso dummen wie gefährlichen Spruch, Rechnen habe noch nichts mit Mathematik zu tun, ein für allemal.

mathe 2000 ist ein *Monument* – und auch ein *Mahnmal*! – für Mathematikunterricht, der Schülern zugemutet werden darf, ja muss. Ich meine, *mathe 2000* leiste einen Beitrag zum "Licht jener Kerze, die uns schützt vor dem Dunkel unbegründeter Ängste, sinnloser Zwänge und entwürdigender Vorurteile", wie der östereichisch-schweizerische Biochemiker Gottfried Schatz in einem NZZ-Artikel vom 3. 8. 2012 in Anlehnung an den Astronomen Carl Sagan im Zusammenhang mit Wissenschaft formuliert.

Wie gut, dass es *mathe 2000* gibt!

UK/120919