

Was ist in der deutschen Bildungspolitik im Bereich MINT seit 50 Jahren falsch gelaufen und wie kann das korrigiert werden? Eine kritisch-konstruktive Analyse¹

Erich Ch. Wittmann, TU Dortmund, Projekt Mathe 2000

Das 20. Jahrhundert hat im Bildungswesen eine Form von Leistungsbewertung hervorgebracht, die weltweit durch die Psychometrie dominiert wird. Die Mathematikdidaktik im 21. Jahrhundert ist herausgefordert, andere Formen von Leistungsbewertung zu entwickeln ... Dafür müssen wir uns von verengten Vorstellungen vom Gehirn als einer Hierarchie [von Kompetenzen], von Schule als einer Produktionsstätte und von Leistungsbewertung als technisch zu lösender Aufgabe verabschieden.

Jeremy Kilpatrick

Gegen eine Dummheit, die gerade in Mode ist, kommt keine Klugheit auf.
Theodor Fontane

Fakt ist, dass Deutschland, ein rohstoffarmes Land, in den letzten beiden Jahrhunderten zu einer technologisch und wirtschaftlich führenden Nation aufgestiegen ist. Fakt ist auch, dass dieser Aufstieg hauptsächlich dem deutschen Bildungssystem zu verdanken ist, dessen Grund bereits im 19. Jhdt., dem „Jahrhundert der Bildung“, gelegt wurde.

1889 stellte ein amerikanischer Beobachter² bei einem Vergleich fest:

Es ist eine Binsenweisheit, dass das Bildungsniveau in Deutschland, einem Land mit wenigen Prüfungen, weit höher ist als in England, wo alles mit einer Prüfung beginnt und alles mit einer Prüfung endet.

Ein englischer Autor, der besonders von der deutschen Entwicklung in Industrie und Wirtschaft beeindruckt war, schrieb 1906³:

Die Deutschen sind langsam, zielbewusst, sorgfältig, methodisch und gründlich in ihrer Arbeit. Sie sind kein unternehmendes und abenteuerliches Volk, sie brauchen Zeit zum Nachdenken und Handeln. Aber sie haben eine unerreichte Fähigkeit darin, den richtigen Weg herauszufinden und ihn unbeirrt zu verfolgen.

Das gute Bildungssystem war auch ein entscheidender Grund dafür, dass Deutschland nach zwei verlorenen Kriegen technologisch und wirtschaftlich schnell wieder Fuß fassen konnte.

Die deutsche Bildungspolitik wäre also gut beraten gewesen, die bewährte Tradition zu pflegen und weiterzuentwickeln, deren besonderes Merkmal *die fachliche Fundierung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts unter enger Verzahnung der Fächer* war.

¹ Der Autor wurde 1969 auf eine Professur für Didaktik der Mathematik berufen und hat die Entwicklung des Unterrichts und der Mathematikdidaktik seither national und international verfolgt und miterlebt. Die vorliegende Fassung des Artikels stammt vom August 2024.

² R.W. Rogers, Professor am Haverford College, USA

³ A. Shadwell, Industrial efficiency: A comparative study of industrial life in England, Germany and America, London 1906

Leider verlief die Entwicklung anders: In den 1960er und 1970er Jahren importierte Deutschland *ohne Not* aus den USA die "Neue Mathematik" (im Volksmund "Mengenlehre" genannt) und ähnliche Konzepte in den Naturwissenschaften sowie die „Lernzielorientierung“, die alle Misserfolge auf der ganzen Linie waren. Etwa 30 Jahre später wurde das Bildungssystem im Namen der „Qualitätssicherung“, wieder nach amerikanischem Vorbild und *ohne Not*, auf die „Kompetenzorientierung“ umgestellt. Seither geht es noch schneller abwärts.

Einen Weg zur Konsolidierung zu finden ist bei den vielen Altlasten, die diese Reformen hinterlassen haben bzw. noch hinterlassen, keine einfache Aufgabe. Der vorliegende Beitrag möchte hierzu in doppelter Hinsicht beitragen:

– *Einerseits* sollen Grundfehler aufgezeigt werden, die in der Bildungspolitik bei diesen Reformen gemacht wurden, in der Hoffnung, dass diese Fehler bei einer künftigen Reform, die längst überfällig ist, vermieden werden.

– *Andererseits* soll ein Weg zu einer soliden mathematischen Bildung aufgezeigt werden, der nach dem Scheitern der „Neuen Mathematik“ hätte beschritten werden können, wenn man sich damals auf *eigene* tragfähige Konzepte besonnen hätte. Heinrich Winter hat bereits 1975 (!) mit seinen allgemeinen Lernzielen, die mit den Strukturen und Inhalten der Mathematik eng verbunden sind, eine erweiterte Zielsetzung des Unterrichts formuliert und die Rolle der Mathematik für die Allgemeinbildung überzeugend beschrieben. Daran kann angeknüpft werden, um die Weichen für einen Mathematikunterricht zu stellen, der Fachstrukturen als Lehr-/Lernhilfen nutzt und *auf der Grundlage einer breiten Bildung* auf praktische Anwendungen zielt, was um ein Vielfaches effektiver ist als das heute dominierende Bestreben nach unmittelbarer „Lebens- und Praxisnähe“.

Der Beitrag ist folgendermaßen strukturiert:

In den drei ersten Abschnitten werden die Annahmen, auf denen die gescheiterten Reformen beruhen, beschrieben und einer kritischen Bewertung unterzogen.

Im vierten Abschnitt wird gezeigt, dass ein Neustart nur gelingen kann, wenn man sich von einem *unverfälschten Bild* von Mathematik leiten lässt.

Im letzten Abschnitt wird der von Heinrich Winter vorgezeichnete Weg zu einer stufenübergreifenden Konsolidierung des Unterrichts ausformuliert.

1. Die „Mengenlehre“-Reform von 1968

Die um 300 v.Ch. verfassten „Elemente“ von Euklid galten über mehr als zwei Jahrtausende als unbestrittenes Vorbild für einen systematischen Aufbau der Mathematik. Im 19. Jahrhundert wurde entdeckt, dass dieses Gebäude Lücken aufwies. David Hilbert (1862 – 1943), einem der größten Mathematiker aller Zeiten, gelang es, in seinem Werk *Grundlagen der Geometrie* ein vollständiges Axiomensystem zu formulieren und die Geometrie auf eine *exakte formale Grundlage* zu stellen (Hilbert 1899).

Dieser Erfolg regte dazu an, die gesamte Mathematik formal aufzubauen. Hilbert selbst war dabei die treibende Kraft. Seine Vision war es, mithilfe dieser Methode auch die Widerspruchsfreiheit der Mathematik beweisen und damit die Mathematik auf eine absolut sichere Grundlage stellen zu können. Obwohl der Logiker Kurt Gödel (1906 – 1978) bereits in den 1930er Jahren bewiesen hatte, dass sich das Hilbertsche Grundlagenprogramm nicht

realisieren lässt, setzte sich die axiomatische Methode mehr und mehr durch und wurde in der Mathematik zum unbestrittenen Vorbild.

1935 schlossen sich französische und amerikanische Mathematiker unter dem Pseudonym „Nicolas Bourbaki“ zusammen, um die Mathematik auf drei einfache „Mutterstrukturen“ zu gründen: auf *algebraische Strukturen*, *topologische Strukturen* und *Ordnungsstrukturen* (Bourbaki 1974).

Diese „Strukturmathematik“ breitete sich ab 1960 an den Universitäten auf breiter Front aus und beherrschte dort schnell sowohl die Forschung als auch die Lehre.⁴

Es liegt in der Natur der Sache, dass eine so umwälzende Entwicklung des Faches mit einer gewissen zeitlichen Verzögerung auch auf die Didaktik des Faches durchschlagen musste. Die fünfte Konferenz der „Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement Mathématique“ (CIEAEM) 1952 in Melun/Frankreich stand unter dem Rahmenthema „Structures mathématiques et structures mentales“. In der Konferenz nahmen Jean Dieudonné, der engagierteste Vertreter von Bourbaki nach außen, und Jean Piaget, der damals schon weltberühmte Genfer Epistemologe und Psychologe, teil. Bei ihrem Austausch kamen sie zu dem, wie sich später zeigte, falschen Schluss, die von Piaget aufgedeckten elementaren psychologischen Strukturen fänden in den Mutterstrukturen von Bourbaki ihre Parallele (Dieudonné 1955, Piaget 1955).

Ausgelöst durch den Sputnik-Schock 1957 begannen in den westlichen Ländern hektische Bemühungen um eine grundlegende Reform des Mathematikunterrichts. In den USA nahm die auf Bourbaki aufbauende „New Math“ Fahrt auf und verbreitete sich schnell über die ganze Welt.

Signalwirkung für Europa hatte eine Tagung, die im Jahr 1959 von der *Organisation for Economic Cooperation and Development* (OECD) in Royaumont/Frankreich veranstaltet wurde und bei der Dieudonné, wie schon bei der Tagung im Melun, den Ton bestimmte. In seinem Vortrag forderte er, die Elementargeometrie aus dem Unterricht zu eliminieren und durch die Lineare Algebra zu ersetzen: „Euclid must go!“ (Dieudonné 1961).⁵

Eine von der OECD im Anschluss an diese Konferenz eingesetzte Arbeitsgruppe verfasste ein Buch, das der „*Neuen Mathematik*“ das Tor nach Europa öffnete (dt. Übersetzung Schoene 1963). Kurze Zeit später verabschiedete der Verein zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) bei seiner Jahrestagung 1965 in Nürnberg die „Nürnberger Lehrpläne“, die ganz auf dieser Linie lagen.⁶ 1968 beschloss die Konferenz der Kultusminister der deutschen Bundesländer (KMK) „Empfehlungen und

⁴ Der Autor hat in seinem Studium 1959 – 1964 an der Universität Erlangen den radikalen Bruch miterlebt. Am gravierendsten zeigte sich dieser Bruch in der Geometrie. Innerhalb weniger Jahre wurde die traditionelle Anfängervorlesung „Analytische Geometrie I, II“ durch „Analytische Geometrie und Lineare Algebra I, II“ und danach durch „Lineare Algebra I, II und Multilineare Algebra“ abgelöst.

⁵ Nach dem Vortrag erhob sich die italienische Didaktikerin Emma Castelnuovo, bekannt durch ihre Beiträge zum Geometrieunterricht, und rief Dieudonné zu: „Ohne das Dreieck, das einzige starre Polygon, würde Ihr schöner Eiffelturm gar nicht existieren.“ Dieudonné stand bei seinem Vortrag hinter einem Tisch, dessen Platte von dreieckigen Stützen getragen wurde (Mündliche Mitteilung von Lucien Kieffer/Luxembourg, der an der Konferenz teilgenommen hatte).

⁶ Der Autor hat damals als Studienreferendar am Dientzenhofer-Gymnasium Bamberg an dieser Tagung teilgenommen und stand, seit er das Memorandum Ahlfors (1962) und den Artikel Freudenthal 1963 gelesen hatte, der „Mengenlehre“ ablehnend gegenüber.

Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts“, mit der die „Neue Mathematik“, in der Öffentlichkeit kurz als „Mengenlehre“ bezeichnet, zum offiziellen Reformprogramm erklärt wurde. Die Notwendigkeit der „Neuen Mathematik“ wurde mit dem Argument begründet, die Wirtschaft würde im internationalen Wettbewerb zurückfallen, wenn der Mathematikunterricht nicht in dieser Weise „modernisiert“ würde.

Auf der Grundlage der KMK-Richtlinien und Empfehlungen erließen die einzelnen Bundesländer entsprechende Lehrpläne für alle Schulstufen und Schulformen und ordneten deren Umsetzung in der Praxis an. Die Verlage brachten in Windeseile entsprechende Unterrichtswerke auf den Markt. Die Pädagogischen Hochschulen und Universitäten stellten sich in der Lehrerbildung schnell auf die neuen Vorgaben ein. An vielen Orten lauteten die Titel der Vorlesungen für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen im ersten Semester „Mengen“, im zweiten „Relationen“ und im dritten „Abbildungen“. Standardreferenz war das dreibändige Werk „Neue Mathematik für Lehrer und Studenten“ (Griesel 1971–1974).

Auch in der Deutschen Demokratischen Republik (DDR) zog die „Mengenlehre“ in den Lehrplan und die Lehrerbildung ein, allerdings in abgeschwächter Form. Als Vorbild diente eine entsprechende Reform in der Sowjetunion, die von dem Spitzenmathematiker Andrei N. Kolmogorov ganz im Geiste von Bourbaki vorangetrieben wurde. Großen Einfluss hatte in der DDR die Mathematikdidaktikerin Lilly Görke. Der Titel ihres Hauptwerks war „Mengen, Relationen, Funktionen“ (Görke 1967).

Der bekannteste Protagonist von „New Math“ war der Ungar Zoltan P. Dienes (1916 – 2014). Er hielt auf der ganzen Welt Vorträge und verfasste zahlreiche Taschenbücher, die in viele Sprachen übersetzt wurden. Für seine Vorstellungen von Mathematikunterricht ist folgendes Zitat repräsentativ (Dienes 1966, Übers. E.Ch.W.):

Während der sechs Jahre in der Grundschule werden viele Kinder einen Grad von mathematischer Reife erreicht haben, der es ermöglicht, sie in fast jedem Bereich der Mathematik zu unterrichten, der heute normaler Weise in der Oberstufe oder in den ersten Jahren der Universität unterrichtet wird: Gruppen, das Studium von Untergruppen, Isomorphismen, Ringe, simultane Gleichungssysteme.⁷

An Kritik an der „Neuen Mathematik“ hat es nicht gefehlt. Bereits 1962 (!) verabschiedeten etwa 70 renommierte amerikanische Mathematiker ein wohlbedachtes Memorandum für eine Curriculum-Reform jenseits von „New Math“ (Ahlfors et al. 1962). Einer der Unterzeichner war George Polya (1887 – 1985), bekannt durch seine Bücher über Heuristik, ein anderer Alexander I. Wittenberg (1926 – 1965), der sich ein Jahr später einen Namen mit einem Buch über mathematische Bildung machte (Wittenberg 1963). Etwa zeitgleich warnte Hans Freudenthal vor der blinden Übernahme der Strukturmathematik in der Schule (Freudenthal 1963). Die englische „Association of Teachers of Mathematics“ veröffentlichte 1967 ein Buch zum Grundschulunterricht, in dem die „Neue Mathematik“ im letzten Abschnitt nur kurz behandelt wurde (ATM 1967),⁸ ein klares Indiz dafür, dass die Autoren diesem Thema keine besondere Bedeutung beimaßen.

⁷ Nach dem Vortrag eines Protagonisten der „Neuen Mathematik“ Anfang der 1970er Jahre wurde die Frage gestellt, wo denn dabei das Einmaleins bliebe. Die Antwort: „Wenn die Zahlen auf dieser Grundlage eingeführt werden, fällt das Einmaleins wie ein reifer Apfel vom Baum.“

⁸ Dieses Werk hatte für das Projekt Mathe 2000 eine Schlüsselfunktion.

Unter den Kritikern an der „Neuen Mathematik“ ragte der französische Fields-Medaillist René Thom heraus, der in einem Plenarvortrag bei dem 2nd International Congress on Mathematical Education (ICME 2) in Exeter aufzeigte, dass „New Math“ auf einem falschen Bild von Mathematik beruhte (Thom 1972, 202, Übers. E.Ch.W.):

Das wahre Problem, vor dem der Mathematikunterricht steht, ist nicht das der formalen Strenge, sondern das Problem, „Sinn“ zu stiften und die „Existenz“ der mathematischen Objekte zu begründen.

Aufschlussreich war auch ein Vortrag des Geometers Robert Ossermann bei IMCE 4 (1980), in dem darauf hingewiesen wurde, dass sich große Teile der heutigen Mathematik, insbesondere der angewandten Mathematik, völlig außerhalb der Strukturmathematik von Bourbaki entwickeln (Ossermann 1983).

Auch in der UdSSR verstärkte sich die Kritik am Bourbakismus und an „New Math“. Kolmogorov traf in der Akademie der Wissenschaften auf erbitterten Widerstand, vor allem aus den Reihen der Mathematiker, die in der mathematischen Physik und der Geometrie arbeiteten. Der russische Fields-Medaillist Sergei P. Novikov stellt im Rückblick Folgendes fest (Novikov 2004, 5, Übers. E.Ch.W.):

Die französische Mathematikerschule schlug nach Poincaré ... eine ultra-abstrakte Richtung ein und führte in Paris (und dann in der ganzen Welt) eine unüberbrückbare Kluft zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften herbei. Einige der damaligen Stars (wie E. Cartan und J. Leray) missbilligten diese Entwicklung, blieben aber, trotz ihres persönlichen Einflusses, isoliert. Die brillante Gruppe der Pariser Mathematiker kultivierte und vertiefte diese Kluft und bildete die ideologische Basis einer totalen und einheitlichen Formalisierung der mathematischen Bildung, einschließlich der Grundschule und der Sekundarstufe.

Wie stark der Widerstand russischer Mathematiker gegen die Bourbakische Strukturmathematik und die „Neue Mathematik“ damals war, geht auch daraus hervor, dass der Mathematiker Novoshilov, Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, den „Kampf gegen die Verbreitung des mathematischen Formalismus in der Weltbevölkerung“ als „ökologische Aufgabe“ bezeichnete (Nachwort in Blechman et. al 1984).

Der internationale Mathematikerkongress 1978 in Helsinki gilt als Zeitmarke für die Abkehr der Mathematiker von Bourbaki (Stewart 1995). Der Glaube, dieses System verkörpere die Mathematik, hatte sich unter den Mathematikern selbst als Irrtum erwiesen. Das Programm von Bourbaki wurde abgebrochen und blieb unvollendet.

Aus heutiger Sicht ist Folgendes festzuhalten:

Obwohl frühzeitig fundierte Kritik an der „Neuen Mathematik“ geübt wurde, stellten sich die deutsche Bildungspolitik und die große Mehrheit in der mathematikdidaktischen Community jahrelang gegen diese Kritik taub. Alternative Vorschläge zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts wurden ignoriert, obwohl sie vorlagen.

Erst der offenkundige Misserfolg der „Neuen Mathematik“ in der Praxis zwang zu einer klammheimlichen Abkehr. Es dauerte fast 10 Jahre, bis die KMK neue Richtlinien veröffentlichte, die aber keine klare Richtung vorgaben. Der angerichtete Schaden war immens. *Finanzmittel in erheblichen Umfang waren sinnlos ausgegeben, und, noch*

schlimmer, die gewachsene curriculare Struktur des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts war zerstört worden. Zumindest im gymnasialen Unterricht hatte der Formalismus die Oberhand über Inhalte gewonnen. Inhaltlich-anschauliche Zugänge zur Mathematik, die auf dieser Stufe angemessen sind und sich über Jahrhunderte bewährt hatten, wurden als „unsauber“ abqualifiziert. Die elementare Zahlentheorie und die Elementargeometrie, unverzichtbare Pfeiler der Mathematik, wurden stark reduziert. Der Mathematikunterricht in der Sekundarstufe wurde durch die „Neue Mathematik“ schwer und nachhaltig geschädigt.

Heinrich Besuden fasste seine gründliche Analyse der Situation in Deutschland wie folgt zusammen (Besuden, 2007, 35):

Im Gegensatz zur Entwicklung in den USA, wo die „new math“ der 70er Jahre mit der Gegenbewegung „back to basics“ klar und deutlich beendet wurde, verschwand bei uns die „Neue Mathematik“ kaum merklich und stillschweigend von der Bildfläche. Die neuen Inhalte („Mengenlehre“) wurden schrittweise zurückgenommen – alles ohne Spuren zu hinterlassen? Hat nicht die Neue Mathematik, wenn schon keine neuen Lerninhalte, so doch mathematische Bildung vermittelt? Diese Frage muss durch Analyse der damals aufgestellten Ziele und Erwartungen und der ausgebliebenen Erfolge verneint werden.

Man kann es im Rückblick nur als Totalversagen der Verantwortlichen ansehen, dass der Mathematikunterricht, auf den sich die technologische Entwicklung im Handwerk, der Wirtschaft und der höheren Bildung beginnend im 19. Jhdt. wesentlich stützte, als nicht mehr tragfähig angesehen und einfach aufgegeben wurde. Im Gegensatz zu den anwendungreichen Gebieten Arithmetik, Algebra, Elementargeometrie, Analytische Geometrie und Analysis, ist die „Neue Mathematik“ von den Anwendungen weit entfernt (s. Novikov 2004, oben). **Mit ihrer erzwungenen Einführung wurden daher auch die Beziehungen des Mathematikunterrichts zum Unterricht in den Naturwissenschaften und der Technik radikal gekappt.** Eine Folge davon war z.B., dass sich in der Physikdidaktik eine „mathematikfreie“ Richtung etablierte. Das heute mit großem Aufwand geförderte Programm MINT würde auf ganz anderen Füßen stehen, wenn es diese gescheiterte Reform nicht gegeben hätte.

Im Rückblick erscheint das von der KMK vertretene Argument, ohne Einführung der „Neuen Mathematik“ sei die Wettbewerbsfähigkeit von Industrie und Wirtschaft bedroht, als blanker Hohn. Dass diese Behauptung in der Bildungspolitik für bare Münze genommen wurde, wirft ein bezeichnendes Licht auf die damaligen Akteurinnen und Akteure.

Es darf zwar nicht übersehen werden, dass es damals auch positive Reformansätze gab. Diese der „Neuen Mathematik“ selbst zuzuschreiben, ist allerdings unberechtigt⁹. Die Entwicklung hin zu aktiven Methoden und inhaltliche Erweiterungen des Unterrichts in den 70er und 80er Jahren speisten sich aus ganz anderen Quellen als der „Neuen Mathematik“.

⁹ Das in der schönfärberischen Dissertation von Tanja Hamann (Hamann 2018) unter die „Neue Mathematik“ subsumierte Unterrichtswerk „Mathematik in der Grundschule“ von Arnold Fricke und Heinrich Besuden z.B. hat mit der „Mengenlehre“ konzeptionell nichts zu tun. Es beruht auf der „operativen Didaktik“, die Hans Aebli in seiner bei Jean Piaget angefertigten Dissertation entwickelt hatte. Die operative Didaktik ist von den Auffassungen Piagets zur Strukturmathematik aber gänzlich unabhängig. Arnold Fricke und Heinrich Besuden gehörten zu den schärfsten Kritikern der „Neuen Mathematik“.

Das fortschrittliche Buch ATM (1967) ist ein klarer Beleg dafür. Festzuhalten ist auch, dass die aktive Rolle, die Piaget den Lernenden zuschrieb, ganz unabhängig von Piagets Vorstellungen von Strukturmathematik ist. Das Buch ATM (1967) zeigt im Übrigen auch, dass eine organische Einbeziehung struktureller Überlegungen in die traditionellen Gebiete der Elementarmathematik leicht möglich ist und sinnvoll gewesen wäre.

Nach dem Scheitern der „Mengenlehre“-Reform haben es Bildungspolitik und Mathematikdidaktik versäumt, die dabei gemachten Fehler zu analysieren. Offenbar waren zu viele Akteurinnen und Akteure belastet und hatten kein Interesse an einer Aufklärung.

Die nachfolgende 10-jährige Stagnation in der Unterrichtsentwicklung wurde in der Bundesrepublik erst 1985 mit dem Lehrplan für den Mathematikunterricht in der Grundschule von Nordrhein-Westfalen überwunden, der unter der Federführung von Heinrich Winter entstand und Vorbild für die Lehrpläne anderer Bundesländer wurde. Bei Winter, für kurze Zeit Parteigänger der „Neuen Mathematik“, zeigt sich besonders deutlich, dass seine eigentlichen Intentionen bei der Reform des Mathematikunterrichts von der „Neuen Mathematik“ unabhängig waren und erst im Zuge einer *soliden fachlichen Fundierung* des Unterrichts voll zum Tragen kamen (Winter 2017).

In der DDR führte das Scheitern der Kolmogorov-Reform in der UdSSR dazu, dass bereits Anfang der achtziger Jahre der Lehrplan modifiziert wurde. Der neue, die Klassen 1 bis 12 übergreifende Lehrplan bewahrte, anders als die Lehrpläne in der Bundesrepublik, einen (wenngleich teilweise problematischen) *fachlichen Aufbau* und wurde von methodischen Praxishilfen begleitet. Dieses Konzept hat die Zeit überdauert und bietet den östlichen Bundesländern bis heute *per se* einen klaren strategischen Vorteil.

Was die Beziehung Schule – Hochschule angeht, erscheint es im Rückblick absurd, dass „Vorkurse“, die Anfang der 1970er Jahre eingerichtet wurden, um Defizite der Studienanfänger in der „Neuen Mathematik“ zu kompensieren, nicht etwa zeitgleich mit der „Neuen Mathematik“ wieder verschwunden sind, sondern ein Eigenleben entwickelt haben. Heute werden an allen Universitäten standardmäßig „Vorkurse“ angeboten. Alle Beteiligten sind sich stillschweigend einig, dass die Schule generell nicht mehr ausreichend auf das Studium vorbereitet, und halten solche Vorkurse, die erhebliche Finanzmittel verschlingen, für notwendig. Es ist aber völlig abwegig zu glauben, man könne in wenigen Wochen lernen, was in 12 oder 13 Jahren versäumt wurde. Gezielte Bemühungen, das Problem an der Wurzel zu packen, indem man einerseits sinnvolle Curricula entwickelt und andererseits die Universitäten verpflichtet daran anzuknüpfen, gibt es bis heute nicht. Die mathematische Community beharrt einfach auf dem status quo, ohne zu begreifen, dass sie damit auch sich selbst schadet (Wittmann 2016).

2. Die Operationalisierung von Lernzielen in den frühen 1970er Jahren

Einige Jahre später als die „Neue Mathematik“ fasste eine andere Bewegung in Europa Fuß, die ebenfalls aus den USA importiert und durch die OECD mit dem üblichen Verweis auf wirtschaftliche Zwänge propagiert wurde.

Protagonisten waren amerikanische Psychologen, die für das Militär gearbeitet hatten und der Auffassung waren, die dort bewährte genaue Beschreibung von Lernzielen könne unmittelbar auf den Unterricht übertragen werden. Diese Position fand auch im deutschsprachigen Raum schnell Anhänger, besonders in der empirisch ausgerichteten Pädagogik, dem Vorläufer der heutigen Bildungsforschung. Es ist kein Zufall, dass die deutsche

Übersetzung eines Hauptwerks der Lernzieloperationalisierung in einer Reihe erschienen ist, die von dem Pädagogen Heinrich Roth herausgegeben wurde (Gagné 1973). Roth wurde bekannt durch seine Forderung nach einer „empirischen Wende“ der Pädagogik.

Hinter der Operationalisierung der Lernziele steht die Auffassung, der Unterricht könne *nur dann* zu nachweisbaren Erfolgen führen, wenn die Ziele in "behavioral objectives" operationalisiert werden.

Nach Gagné (1973, 257) muss eine solche Beschreibung von Lernzielen folgende Komponenten aufweisen:

1. Ein Verbum, das beobachtbare Handlungen bezeichnet (zeichnen, bestimmen, wiedererkennen, rechnen sind einschlägig; wissen, begreifen, sehen und andere sind es nicht).
2. Eine Beschreibung der Reizklasse, auf die zu reagieren ist (zum Beispiel ‚Gegeben ist der Ausdruck $ab + ac = a[b + c]$ ‘).
3. Ein Wort oder eine Wendung, die das für die Handlung zu benutzende Objekt bezeichnet, falls das nicht schon im Verb impliziert ist. (Wenn das Verbum z. B. ‚zeichnen‘ ist, könnte der Zusatz lauten ‚mit einem Zeichenstift‘; wenn es ‚formulieren‘ heißt, ‚mündlich‘).
4. Eine Beschreibung der Klasse richtiger Antworten (z. B. ‚ein rechtwinkliges Dreieck‘, ‚die Summe‘ oder die ‚Bezeichnung der Regel‘).

Wenn die Lernziele entsprechend beschrieben seien, sollte sich nach Gagné (1963, 257) alles Weitere mehr oder weniger von selbst regeln:

Mit Hilfe dieser Kriterien wird die Formulierung angemessener Zieldefinitionen zu einer relativ leichten Aufgabe. Beispielsweise könnte ein mathematisches Lernziel sein: ‚Gebt die Bezeichnung der dargestellten Regel, wenn ein schriftlicher Ausdruck von der Form $ab + ac = a[b + c]$ gegeben ist. Wenn die Unterrichtsziele in dieser Weise abgeleitet und definiert werden, wird es leicht möglich, die ihnen entsprechenden menschlichen Leistungen zu beobachten. Darüber hinaus ist es möglich, die Erreichung der Ziele zu beurteilen (zu messen). So kann man, wie in einem späteren Abschnitt gezeigt wird, das Problem der Messung von Unterrichtsergebnissen auf ziemlich direkte Weise angehen.

In Gagné (1973, 99, 101) wird die Aufspaltung der Lernziele in Fein- und Feinstlernziele an mathematischen Beispielen demonstriert.¹⁰

Wie die „Neue Mathematik“ fand auch die Lernzieloperationalisierung schnell Eingang in Lehrpläne und in die Lehrerbildung, wenn auch nicht so umfassend. Radikal umgesetzt wurde sie nur in den hessischen Sek I-Lehrplänen von 1972, die unter dem Minister von Friedeburg erlassen wurden, einem Soziologen, der die Lehrpläne als Mittel zur Herstellung der von ihm angestrebten Chancengleichheit im Bildungswesen betrachtete.

Das „Fundamentum in Mathematik“ sah 81 Lernziele vor, von denen 23 durch Fettdruck besonders ausgezeichnet waren. Die ersten zwei lauteten (Damerow 1977, 260):

- Einem vorgegebenen Zustand den zugehörigen Punkt einer Geraden zuordnen können.

¹⁰ Fachlich gesehen sind diese Beispiele absoluter Unsinn, was den empirischen Pädagogen damals nicht aufgefallen ist.

- *Auf einen vorgegebenen Anfangszustand einen vorgegebenen Operator anwenden können.*

Hierin ist deutlich die „Neue Mathematik“ als fachliche Basis zu erkennen, was nicht verwunderlich ist, denn es waren Vertreter der „Neuen Mathematik“, die mit der Formulierung der Lernziele betraut worden waren.

Die Lernzieloperationalisierung fasste besonders in der Lehrerbildung der zweiten Phase Fuß. Die Beurteilung von Stunden dahingehend, ob ein Unterrichtsentwurf „korrekt“ nach Fein- und Feinstlernzielen aufgeschlüsselt war, geriet zum Lieblingssport von Doktrinären in den Fachseminaren.

Auch an der Lernzieloperationalisierung wurde frühzeitig Kritik geübt. Freudenthal 1974, auch in diesem Punkt einer der stärksten Kritiker, sprach von „Lernzielen am dürren Holze“ und stellte ihnen „Lernziele am grünen Holze“ gegenüber (s. dazu Wittmann 1974, Abschnitt 9).

In der Praxis erwies sich dieser mathematisch höchst fragwürdige Ansatz der „Lernzieloperationalisierung“ genauso als Irrweg wie die „Neue Mathematik“.

Aus heutiger Sicht ist festzuhalten:

Auch bei der gescheiterten „Lernzieloperationalisierung“ haben sich Teile der Bildungspolitik, der Pädagogik und der Mathematikdidaktik bedenkenlos einer als Verbesserung des Unterrichts angepriesenen Richtung verschrieben und versucht, sie in der Praxis durchzusetzen. Erneut wurde versäumt, auf Kritiker zu hören und alternative Wege zu einer Qualitätssicherung in Erwägung zu ziehen.

3. Die „Kompetenzorientierung“ ab 2000

Die Entwicklung des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik ist seit 25 Jahren durch die sog. „Kompetenzorientierung“ gekennzeichnet, die bereits oberflächlich als Mutante der Lernzieloperationalisierung erkennbar ist. Nur die Terminologie hat sich etwas geändert. Das gewünschte Verhalten von Schülerinnen und Schülern wird in „competences“ festgehalten, wie es heute statt „behavioral objectives“ heißt. Durch ein psychometrisches Bildungsmonitoring soll kontrolliert werden, welche „Kompetenzstufen“ erreicht werden. Das Stichwort ist „Outputorientierung“.

Es ist eine feine Ironie, dass in neuen Lehrplänen wie dem Lehrplan 21 der Schweiz die „Kompetenzen“ in der gleichen Diktion aufgelistet und nummeriert werden wie in den hessischen Lehrplänen von 1972 die Lernziele, als wäre die Zeit stehen geblieben (EDK 2014):

Der Lehrplan 21 stellt transparent, verständlich und nachvollziehbar dar, was die Schülerinnen und Schüler wissen und können. Aus diesem Grund werden die Ziele im Lehrplan 21 in Form von Kompetenzen beschrieben. In der Regel beginnen die Beschreibungen mit ‚Die Schülerinnen und Schüler können ...‘. Damit wird signalisiert, dass der Lehrplan nicht bereits erfüllt ist, wenn der im Lehrplan aufgelistete Stoff im Unterricht behandelt wurde, sondern erst dann, wenn die Kinder und Jugendlichen über das nötige Wissen verfügen und dieses auch anwenden können. Hinter diesem Grundsatz steht ein Lern- und Unterrichtsverständnis, auf dem zum Teil auch heutige Lehrpläne bereits aufbauen. Es wird in der Grund- und Weiterbildung der Lehrpersonen seit längerem vermittelt und liegt auch neueren Lehrmitteln zugrunde.

Wie vor 50 Jahren hat diese neue Bewegung ihren Ursprung in den USA (NCTM 2000). Treibende Kraft im europäischen Raum ist wiederum die OECD (s. OECD 2000, sowie viele weitere Veröffentlichungen der OECD zu PISA). Die Bildungspolitik setzt die „Kompetenzorientierung“ erneut mit allen verfügbaren administrativen Mitteln durch.¹¹ Weite Teile der Mathematikdidaktik unterstützen dies im engen Schulterschluss mit der Bildungsforschung (Blum 2006). Kritik wird zurückgewiesen. Die Verhältnisse liegen hier mutatis mutandis genauso wie bei der „Neuen Mathematik“ und der „Lernzieloperationalisierung“.

Unter den Kritikern aus der Mathematik ragt wie damals ein französischer Fields-Medaillist mit einer fundierten Analyse heraus. Laurant Lafforgue (2007) stellt fest, dass sich die Mathematik als gewachsener Organismus nicht in „Kompetenzen“ sezieren lässt und die „Kompetenzorientierung“ daher zu einer Zerstörung fachlicher Strukturen und zur Vernachlässigung elementarer Kenntnisse führt.¹²

Fundierte mathematikdidaktische Kritik an der „Kompetenzorientierung“ ist auch von Seiten der Mathematikdidaktik und von einigen Mathematikern geübt worden.

Hans-Dieter Sill hat frühzeitig eine Fundamentalkritik an den Bildungsstandards vorgelegt, in der er zu folgendem Schluss kommt (Sill 2008, 8):

Die aktuellen Bildungsstandards können als der erneute Versuch einer Bildungsreform von oben angesehen werden und sind für mich Ausdruck eines typisch deutschen Hangs zur zentralen Steuerung von Unterrichtsentwicklungen. Sie sind für den Mathematikunterricht weder das Ergebnis einer breiten Bewegung in der Lehrerschaft, noch einer Gesamtanalyse der Curriculumentwicklung in Deutschland und ebenfalls kein Resultat einer wissenschaftlich fundierten Curriculumtheorie.

Hans Schupp stellt einer umfassenden kritischen Analyse zur Entwicklung der Mathematikdidaktik in den letzten Jahrzehnten Folgendes fest (Schupp 2016, 78):

Kultur, kulturelle Kohärenz ist nicht denkbar ohne Tradition, und Tradition ist wesentlich die reflektierte Weitergabe erworbenen Wissens und Verstehens. Diese Reflektion geschieht in der aktiven Auseinandersetzung mit klassischen Inhalten, in unserem Falle mit typischen Vorgehensweisen und Einsichten innerhalb einer zweieinhalb Jahrtausende alten Mathematikgeschichte, im Kennen und Verstehen zeitübergreifender typischer Bemühungen darin. Hier von „trägem“ oder „totem“ Wissen zu reden und sich auf „Sachkompetenz“ (neben vielen anderen Kompetenzen) zu beschränken, ist töricht und leichtsinnig, zumal wenn man diese Kompetenzeuphorie auch noch auf Leistung und Leistungsmessung ausdehnt, d.h. nur noch eng verstandene Fähigkeiten und Fertigkeiten misst und somit höchstens zu oberflächlichen Verbesserungen des Leistungsstandes kommt.

Rainer Kaenders und Ysette Weiss zeigen in mehreren Artikeln überzeugend auf, dass die „Kompetenzorientierung“ einen Bruch mit der international hochgeschätzten deutschen

¹¹ Das Stichwort heißt „change management“. s. dazu Krautz/Burchardt 2018

¹² Lafforgue brandmarkt im Übrigen auch die Indifferenz seiner Mathematikkollegen gegenüber dem Unterricht. In Deutschland ist die Situation leider nicht anders.

Bildungstradition herbeigeführt und ein Absinken des Niveaus bewirkt hat (Kaenders & Weiss 2017, Weiss & Kaenders 2018, 2019). Dieter Remus und Sebastian Walcher (2016) sprechen in ihrer Analyse treffend von der „Entkernung“ des Mathematikunterrichts.

Gewicht hat auch die Kritik von Philosophen. Liessmann (2014, 45 - 77) geißelt mit der „Kompetenzorientierung“ auch die „Fächerdämmerung“ und die „neue Disziplinlosigkeit“.

Türcke (2016) weist darauf hin, dass die Bildungsstandards an der Oberfläche bleiben und nicht das beschreiben, was geistige Leistung wirklich trägt:

Alle Bildungsstandards fordern Soft Skills. Hard Skills wie Kopfrechnen, Rechtschreibung, Memorieren werden widerwillig mitgeschleppt und erodieren. Sie gelten nicht mehr als mentale Elementartechniken, nicht mehr als Unterbau höherer Leistungen, sondern sie sind unter der Würde von Kindern, die durch kreatives Entdecken statt durch Pauken vorankommen sollen. Kompetenzmodellierer und Bildungspolitiker argumentieren wie Pianisten, die kaum mehr Klavier üben, weil es nicht auf Technik ankomme, sondern auf die Musik. Oder wie Fußballtrainer, die das Kraft- und Konditionstraining abschaffen, um Zeit fürs Eigentliche zu gewinnen: das intelligente Zusammenspiel, die Hackentricks und Fallrückzieher. Sie sägen also an dem Ast, auf dem das Eigentliche sitzt.

Kritik an einem auf die Lebenspraxis ausgerichteten Mathematikunterricht („Alltagsmathematik“) kommt auch aus einer ganz anderen Ecke. Die Psychologin Margret Donaldson hat in ihrem Buch „Wie Kinder denken“ darauf hingewiesen, dass die Konzentration auf Alltagsbezüge für die geistige Entwicklung von Kindern schädlich ist (Donaldson 1982, 14 – 15, 137).

Um seine geistigen Fähigkeiten entwickeln zu können, muss das Kind bis zu einem gewissen Grad Kontrolle über sein Denken erlangen; dies ist ihm jedoch nicht möglich, solange es sich seines Denkens nicht bewusst ist. Diese Kontrolle zu erlangen bedeutet, das Denken aus der ursprünglichen, unbewussten Einbettung in die Notwendigkeiten des Lebens und aus der Interaktion mit anderen herauszureißen; es setzt voraus, dass das Kind lernt, sich über die Grenzen von Alltagszusammenhängen hinaus zu bewegen. Von diesem Schritt hängt die Entwicklung aller höheren geistigen Funktionen ab.

Der Prozess, durch den das Kind diese Grenzen alltäglicher Beziehungsstrukturen überschreitet, ist insofern als unnatürlich zu bezeichnen, als er sich nicht von selbst ergibt. Dass dieser Schritt überhaupt möglich ist, ist langen Jahren kultureller Entwicklung zu verdanken. Das einzelne Kind kann diese Möglichkeit nur realisieren, wenn alle in einer Kultur verfügbaren Hilfsmittel in unverminderter Anstrengung auf dieses Ziel hin ausgerichtet sind.

Die „reine Mathematik“ spielt bei dieser Grenzüberschreitung eine Schlüsselrolle. Mit der „Kompetenzorientierung“ und dem Bestreben nach "mathematical literacy", Lebensnähe und unmittelbarer Anwendbarkeit werden die Bemühungen um Denkerziehung unterlaufen. **Mit diesem primitiven Niveau von „Bildung“ entzieht man der Gesellschaft den Boden.**

Der Literat G.K. Chesterton hat vor fast hundert Jahren bei seinem Vortrag zum 100. Jubiläum der University of London prägnant formuliert, was er als kommende Gefahr für die Kultur sah: „*standardisation by a low standard*“ (Chesterton 1927). Die „Kompetenzorientierung“ passt voll in dieses Bild.

Fassen wir zusammen:

Auch heute ist die Forderung der Bildungspolitik und der Bildungsadministration nach besseren schulischen Leistungen nachzuvollziehen, denn der Unterricht bleibt im Vergleich mit früher weit hinter dem zurück, was er leisten könnte. Um dies feststellen zu können, bedarf es keiner Bildungsforschung. Die Erfahrungen von Lehrerinnen und Lehrern an allen Schulformen, von Ausbildern in der beruflichen Erstausbildung und von Hochschullehrern bestätigen es auf der ganzen Linie.

Es ist erneut festzustellen, dass

- mit der „Kompetenzorientierung“ und dem Bildungsmonitoring zum dritten Male ein Import aus den USA als alternativloser Weg zur „Qualitätssicherung“ verfolgt wird,***
- die Bildungspolitik fundierte Kritik an der „Kompetenzorientierung“, die auch in den eigenen Reihen geübt wird¹³, ignoriert und starr am eingeschlagenen Weg festhält.***

Dem deutschen Bildungssystem wurde und wird damit zum dritten Mal gravierender Schaden zugefügt. Wie bei der „Neuen Mathematik“ wird auch bei der „Kompetenzorientierung“ das erklärte Ziel, die technologische und wirtschaftliche Entwicklung zu unterstützen, verfehlt, auch wenn die Vertreter der „Kompetenzorientierung“ genauso wie seinerzeit die Vertreter der „Neuen Mathematik“ mantrahaft das Gegenteil beteuern. Dass heute mit hohen Kosten eigene MINT-Programme aufgelegt werden müssen, ist wesentlich dadurch bedingt, dass die „kompetenzorientierten“ Mathematiklehrwerke der Sekundarstufe im Hinblick auf MINT hochgradig *defizitär* sind. Es wäre *weit effektiver und kostengünstiger*, die Lehrpläne und Lehrwerke neu zu fassen, anstatt Programme zu finanzieren, die am Grundproblem nichts ändern.

Die „Kompetenzorientierung“ stößt zwar (noch) nicht auf so einhellige Ablehnung wie seinerzeit die „Neue Mathematik“ und ist auch nicht so absurd wie die Lernzielorientierung, was auch daran liegen dürfte, dass das Wort „Kompetenz“ von seiner ursprünglichen Bedeutung her positiv besetzt ist. Diese Richtung dürfte sich also unter dem administrativen Druck und der üppigen Unterstützung mit Personal- und Finanzmitteln länger halten als die vorhergehenden Reformen. Immerhin ist bereits eine gewisse Ernüchterung festzustellen. Es ist allerdings zu befürchten, dass die Protagonisten der „Kompetenzorientierung“ mit veränderter Rhetorik weiter Druck ausüben.

Mit der „Kompetenzorientierung“ wurde auch die deutsche Rechen- und Stoffdidaktik, der die Erfolge des deutschen Bildungssystems im 19. und 20. Jahrhundert wesentlich zu verdanken sind, als „veraltet“ an den Rand geschoben und an deren Stelle die angelsächsisch geprägte Mathematikdidaktik importiert, die von Fach weit entfernt ist, wie die australische Didaktikerin Lynn English in Bakker et al. (2021, 12) kurz und trocken zu Protokoll gegeben hat:

[The mathematics education research] literature has been moving away from the original goals of mathematics education. We seem to have been investigating everything but the actual learning of important mathematics topics.

¹³ Ein markantes Beispiel ist Mathias Brodkorb, von 2011 bis 2016 Minister für Bildung, Wissenschaft und Kultur von Mecklenburg-Vorpommern (Brodkorb (2016)). Auch die bis 2020 amtierende Kultusministerin von Baden-Württemberg, Susanne Eisenmann, hat die „Kompetenzorientierung“ als „Holzweg“ bezeichnet.

Diese unsinnige Entwicklung wurde noch durch die etwa gleichzeitig erfolgende Neugestaltung der Universitäten nach angelsächsischem Vorbild verstärkt. Die Folgen für die Lehrerbildung und Unterrichtsentwicklung sind verheerend.

4. Was ist Mathematik und welche Bedeutung hat das *wohlverstandene* Fach für die gesellschaftliche und wirtschaftliche Entwicklung?

Obwohl die in den Abschnitten 1 – 3 beschriebenen Reformprogramme sehr unterschiedlich sind, liegt ihrer Einführung der gleiche Fehler zugrunde: *Sie beruhen allesamt auf einer verzerrten Auffassung von Mathematik.* Sinnhaftes Lehren und Lernen von Mathematik setzt aber das *unverfälschte Fach* voraus. Im Hinblick auf die im abschließenden Abschnitt 5 dargestellte Alternative erscheint daher es sinnvoll, diesen alles entscheidenden Punkt vorab genauer zu erläutern, um sowohl die zurückliegenden verfehlten Reformen als auch Weiterentwicklungen der Lehrpläne daran messen zu können.

Unter Mathematikern wird heute weithin die Auffassung geteilt, dass Mathematik *die Wissenschaft von den Mustern* ist. Diese Charakterisierung stammt ursprünglich vom englischen Mathematiker W.W. Sawyer, einem begnadeten Vermittler von Mathematik. In einem frühen Lehrbuch schreibt er (Sawyer 1955, 12, Übers. E.Ch.W.):

Mathematik ist die Klassifikation und das Studium aller möglichen Muster. Muster (...) wird hier in einem sehr umfassenden Sinn verstanden, um fast jede Regelmäßigkeit einzuschließen, die vom menschlichen Geist erkannt werden kann.

Der amerikanische Mathematiker William Thurston, dem 1982 Fields-Medaille verliehen wurde, schließt sich dieser Beschreibung in einem Grundsatzartikel zur Mathematik mit einer kleinen Ergänzung ausdrücklich an (Thurston 1994, 162, Übers. E.Ch.W.):

Mathematiker haben das Gefühl, dass sie wissen, was Mathematik ist, finden es aber schwierig, eine gute direkte Definition zu geben (...) Für mich erfasst „Theorie der formalen Muster“ die Mathematik am besten.

Sawyer (1911 – 2008) übte in den 1950er und 1960er Jahren durch seine Lehrbücher und Artikel, die gleichermaßen die Struktur und die Anwendungen der Mathematik berücksichtigen, sehr großen Einfluss auf die Mathematikdidaktik im englischsprachigen Raum aus. Das Buch ATM (1967) ist sichtlich durch seine Auffassungen von Mathematik geprägt. Von Anfang bis Mitte der 1960er Jahre hatte Sawyer eine Professur in den USA inne und gehörte zu den Unterzeichnern des Memorandums Ahlfors et al. (1962).

Heinrich Winter hat in einem grundlegenden Artikel zur Bedeutung des Faches Mathematik für die Allgemeinbildung den Bildungsauftrag des Mathematikunterrichts in drei Punkten zusammengefasst (Winter 1995, 37):

- (1) *Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen,*
- (2) *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenzulernen und zu begreifen,*

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben, die über die Mathematik hinaus gehen.

Im Vergleich zeigt sich, dass die „Neue Mathematik“ einseitig die strukturelle und formale Seite der Mathematik, also (2), betonte, noch dazu in einer verzerrten Form. In der „Kompetenzorientierung“ hingegen wird einseitig auf den Aspekt (1), gesetzt. Mit *echten* Anwendungen der Mathematik haben die von der „Kompetenzorientierung“ propagierten „Anwendungen“ allerdings kaum etwas tun. Viele „Anwendungs“aufgaben sind an den Haaren herbeigezogen (Bandelt 2015, Kühnel 2015). Mathematische Strukturen, insbesondere die elementare Zahlentheorie und die Elementargeometrie und mit ihnen Beweise, sind aus den „kompetenzorientierten“ Lehrplänen und Unterrichtswerken so gut wie verschwunden.

Die obigen Punkte (2) und (3) kann man unter „Denkerziehung“ subsumieren. In den Lehrplänen wurde diesem Ziel seit dem 19. Jhdt. durch entsprechende Aufgaben immer ein prominenter Platz eingeräumt, auch wenn in der Praxis die Realität oft hinter dem Anspruch zurückblieb. Der „Neuen Mathematik“ muss man zugutehalten, dass sie die „Denkerziehung“ immerhin anstrebte. Mit der „Kompetenzorientierung“ dagegen wurde die Aufgabe des Mathematikunterrichts, in fachspezifischer Weise zur Denkerziehung beizutragen, aufgegeben.

In der Beschreibung von Winter (1997) spiegeln sich zwei komplementäre Aspekte der Mathematik wider, die man als „reine“ und „angewandte“ Mathematik bezeichnet. Die reine Mathematik befasst sich mit Theorien, in denen komplexe Muster aus einfachen Mustern entwickelt werden. Diese Theorien sind für die Anwendungen unentbehrlich, denn sie liefern die Bausteine und die Methoden, die man für effektive Modellierungen benötigt (Beutelspacher 1997, 7 – 8). Umgekehrt werden mathematische Theorien aber oft auch durch Anwendungen angeregt. Beide Aspekte gehören also untrennbar zusammen.

In der reinen Mathematik spielen Beweise die *Schlüsselrolle*. Günter Ziegler bezeichnet Beweise zurecht als das „**Herz der Mathematik**“ (Ziegler 2008). Da es bei den Anwendungen keine Beweise gibt, ist ein Mathematikunterricht, der einseitig auf Anwendungen abzielt, „herzlos“ und verdient seinen Namen nicht. Die einseitige Ausrichtung auf „Anwendungen“, die mit der „Kompetenzorientierung“ verbunden ist, geht auch zu Lasten der Schönheit der Mathematik, die ein Wesensmerkmal dieses Faches ist und nur bei inhaltlich reichen mathematischen Strukturen zur Geltung kommen kann.

In einer Kontroverse mit dem französischen Mathematiker J.B.J. Fourier (1786 – 1830), der für seine Erfolge bei der Anwendung der Mathematik auf physikalische Phänomene berühmt ist, äußerte sich der deutsche Mathematiker C.G.J. Jacobi (1804 – 1851) in einem Brief wie folgt:

Herr Fourier vertrat die Meinung, das Hauptziel der Mathematik sei ihr Nutzen für die Gesellschaft und die Erklärung der Naturphänomene; aber ein Naturphilosoph wie er hätte wissen müssen, dass das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes ist und dass bei diesem Anspruch eine Frage über Zahlen ebenso viel wert ist wie eine Frage über das Weltsystem.

Damit wollte Jacobi den reinen Aspekt keineswegs gegen den angewandten Aspekt ausspielen. Jacobi selbst hat ja auch fundamentale Beiträge zur theoretischen Physik geleistet. Die Geschichte der Mathematik, namentlich auch der Elementarmathematik, unterstreicht auch eindrucksvoll, dass die Erfolge bei praktischen Anwendungen eng mit

ihren Erfolgen in der Theorieentwicklung zusammenhängen. Der englische Mathematiker A.N. Whitehead hat dies prägnant formuliert (Whitehead 1911, 100):

Es ist überhaupt nicht paradox, dass wir in unserer zutiefst theoretischen Ausrichtung [der Mathematik] den praktischen Anwendungen am nächsten sind.

Dass die Denkerziehung im Unterricht, sofern sie an *anwendbare* Mathematik gekoppelt ist, keineswegs von den Anwendungen der Mathematik wegführt, sondern ihnen *ganz im Gegenteil* langfristig zugutekommt, wird durch eine interessante Beobachtung des großen Chemikers Justus von Liebig (1803 – 1873) untermauert. Zu seiner Zeit gab es viele humanistische Gymnasien, in deren Lehrplänen die Naturwissenschaften nur eine marginale Rolle spielten und der Mathematikunterricht vorwiegend auf die reine Mathematik und die Denkerziehung ausgerichtet war. Von Liebig stellte fest:¹⁴

Ich habe häufig gefunden, dass Studierende, die von guten humanistischen Gymnasien kommen, sehr bald die von Gewerbe- und polytechnischen Schulen auch in den Naturwissenschaften weit hinter sich zurücklassen, selbst wenn die letzteren anfänglich im Wissen gegen die anderen wie Riesen gegen Zwerge waren.

Es liegt in der Natur der Sache, dass ein Mathematikunterricht, der sich auf *vielfältig anwendbare* mathematische Strukturen konzentriert, einem Unterricht weit überlegen ist, der sich von einem „verengten Pragmatismus“ (Anna S. Krygowska) leiten lässt und ohne strukturellen Unterbau auf „Anwendungen“ fixiert ist.

Die deutsche Industrie ist mit dieser intelligenten Form der Anwendungsorientierung in der Vergangenheit bestens gefahren, ja ihre Erfolge beruhten wesentlich auf ihr. Der Vergleich mit Asien ist in diesem Zusammenhang sehr lehrreich. Lehrbücher aus Singapur genießen heute weltweit Anerkennung. Wenn man diese Lehrbücher und auch die Lehrbücher anderer asiatischer Länder analysiert, stellt man fest, dass sie in der Tradition der deutschen Lehrbücher des 19. und frühen 20. Jhdts. stehen. Die damaligen deutschen Lehrbücher waren durch einen klaren fachlichen Aufbau gekennzeichnet, dienten schon England als Vorbild und strahlten von dort in die Bildungssysteme der Länder des Commonwealth aus. Auch Japan hat sich nach der Meiji-Reform am deutschen Bildungssystem und der deutschen Mathematikdidaktik orientiert. Die asiatischen Länder haben bei ihren heutigen Lehrwerken den fachlichen Aufbau bewahrt, der in Deutschland mit der „Kompetenzorientierung“ gedankenlos aufgegeben wurde.¹⁵

Weiss & Kaenders (2019, 66 - 67) beschreiben die negativen Folgen dieser Fehlentscheidung für den Industriestandort Deutschland in aller Klarheit:

Die mangelnden Voraussetzungen für eine Ausbildung oder ein Studium werden neuerdings auch von Vertretern der Wirtschaft, vor allem mittelständischen Betrieben bemerkt und kritisiert. Man erinnert sich vielleicht, dass Deutschland bei der Produktion qualifizierten Humankapitals sowohl im handwerklichen als auch im akademischen Bereich nicht nur den eigenen Bedarf deckte, sondern sogar exportfähig war. Die dringend notwendige Analyse, wie es zu der jetzigen Situation kommen konnte, wurde zugunsten des unmittelbaren Krisenmanagements und der kurzfristigen Lösung der

¹⁴ 50. Brief von Justus Liebig an den Verleger Vieweg

¹⁵ Der Autor dieses Beitrags kam vor einigen Jahren bei einer didacta an einem Stand vorbei, an dem Modelle von Kegelschnitten und Körpern ausgestellt waren, die bei uns früher einen festen Platz im Curriculum hatten, heute aber im „kompetenzorientierten“ Unterricht nur ein Schattendasein führen. Auf die Frage an den Standbetreuer, wie man von diesen Produkten leben kann, kam die kurze Antwort: „Asien!“

dringenden Frage, woher denn nun wieviel qualifiziertes Humankapital zu importieren sei, verschoben. Als günstig für die Wirtschaft stellt sich dabei heraus, dass es noch Bildungssysteme gibt, die mit mathematischen Kalkülen vertraute Schüler hervorbringen – trotz fehlender Kompetenzorientierung.¹⁶ Der Import dieses Humankapitals geschieht unter Einsparung der entsprechenden Entwicklungskosten, womit diese Länder unsere Wirtschaft unfreiwillig unterstützen. Unter diesen Produzenten mathematisch ausgebildeten Humankapitals sucht man die geistigen Väter und Mütter von Bildungsstandards, mathematical literacy und Kompetenzen jedoch vergebens.

Es ist offenkundig, dass Deutschland mit der „Kompetenzorientierung“ an dem Ast sägt, auf dem es wirtschaftlich sitzt, und dafür auch noch in erheblichem Umfang Finanzmittel einsetzt. Warum die deutsche Wirtschaft nicht wahrnimmt, dass ihr der Boden entzogen wurde und wird, auf dem ihre Erfolge beruhen, und warum sie nicht längst Alarm geschlagen hat, ist unbegreiflich.

Leider fehlt es heute anders als in der Zeit der „Neuen Mathematik“ an einer klaren Positionierung der mathematischen Community. Im Jahr 1973 hat die *Deutsche Mathematikervereinigung* (DMV), zwar reichlich spät, aber immerhin, eine kritische Stellungnahme zur „Neuen Mathematik“ abgegeben (abgedruckt in Müller & Wittmann 1981, 165). Eine entsprechende Stellungnahme der DMV zur „Kompetenzorientierung“ ist bisher ausgeblieben, ganz im Gegenteil: Es gibt nicht wenige Mitglieder der DMV, die den Schulerschluss mit Vertreterinnen und Vertretern der „Kompetenzorientierung“ in der *Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (GDM) und dem *Förderverein für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht* (MNU) suchen. Die gemeinsame Stellungnahme von DMV, GDM und MNU zum Übergang Schule-Hochschule vom Februar 2019 ist hierfür ein typisches Beispiel. Diese Stellungnahme lässt das eigentliche Problem, die Entwicklung fachlich-aufbauender Lehrpläne und Curricula, völlig außen vor, was nicht überraschend ist, da an der Abfassung der Stellungnahme seitens der GDM und MNU Protagonisten der „Kompetenzorientierung“ mitgewirkt haben, denen das Sensorium für einen fachlichen Aufbau zu fehlen scheint.

Der strategische Vorteil der asiatischen Länder zeigt sich im Übrigen auch darin, dass sie ihre Pädagogischen Hochschulen nicht aufgelöst und in Universitäten „integriert“, sondern sie zu Pädagogischen Universitäten weiterentwickelt bzw. innerhalb der Universitäten eigene Abteilungen für Lehrerbildung geschaffen haben. In diesen Einrichtungen gibt es auch Professuren für Mathematik, die aber in ihrer Lehre verpflichtet sind, die Belange des Berufsfelds Schule zu berücksichtigen. Bei uns hingegen gilt es als ausgemacht, dass die Höhere Mathematik die Elementarmathematik *per se* einschließt, was ein fataler Irrtum ist.

Wolfgang Kroll, einer der erfahrensten Gymnasialdidaktiker, Lehrerausbilder und Schulbuchautoren, hat in einer Grundsatzkritik an der gymnasialen Lehrerbildung festgestellt (Kroll 1997, 87):

[Die] Schulmathematik [ist] weder in der Universitätsmathematik enthalten noch kann sie ohne weiteres aus ihr abgeleitet werden. Selbst dort, wo die Namensgleichheit Gemeinsamkeiten suggeriert, handelt es sich um etwas ganz Verschiedenes. Wer „Analysis“, „Lineare Algebra“, „Stochastik“ im Studium lernt, lernt nur ihren deduktiven Aufbau kennen (einen!) und erfährt nichts über die Analysis, Lineare Algebra

¹⁶ bzw. „wegen fehlender Kompetenzorientierung“

und Stochastik der Schule, über ihre Beweg- und Hintergründe, Sinnkonstruktionen, Anwendungen. Er erhält allenfalls eine falsche Vorstellung von seiner unterrichtlichen Aufgabe.

Die Unterordnung der Lehrerbildung unter die gewohnten Vorlesungsangebote ist für die mathematischen Fachbereiche natürlich sehr bequem. Damit können sie ihre kapazitative Auslastung begründen, ohne sich Mühe mit speziellen Angeboten für Lehramtsstudierende geben zu müssen. So gesehen stellt sich der Schulterschluss der DMV mit der GDM und MNU bei der Stellungnahme zum Übergang Schule-Hochschule für alle Seiten als win-win-Situation dar: In der GDM und MNU kann man weiter an der „Kompetenzorientierung“ festhalten, in der DMV kann man in der Lehrerausbildung alles beim Alten lassen.

Die Protagonisten in der GDM und DMV, insbesondere in den Hochburgen der „Kompetenzorientierung“, wie dem *Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik* (DZLM), nutzen die o.g. Stellungnahme darüber hinaus als Argumentationsbasis, um von der Politik und der Industrie weitere Finanzmittel für Projekte zur Erforschung des Übergangs Schule – Hochschule fordern zu können. Diese „Forschungen“ und die Vorkurse wären überflüssig, wenn sich die Mathematikdidaktik auf ihre Kernaufgabe, nämlich die Entwicklung fachlich-aufbauender Curricula, konzentrieren würde, und wenn die Lehrerbildung inhaltlich reformiert würde. Dazu müsste die Bildungspolitik dringend in kritische Distanz zu dem Filz DMV/GDM/MNU treten, und in den Kontakten zwischen diesen Verbänden müsste der von Eigeninteressen geleitete „kleine Kameradenweg“ durch eine *sachbezogene offene* Diskussion ersetzt werden.

5. Das Konzept von Heinrich Winter für eine solide mathematische Bildung

Die Mathematik hat sich in einem geschichtlichen Prozess organisch entfaltet. Ihre Grundpfeiler sind die Arithmetik und die Elementargeometrie, aus denen sich später andere Bereiche der Elementarmathematik (Algebra, Analysis, Stochastik) herausgebildet haben, die im Laufe von Jahrhunderten in engster Verbindung mit den Naturwissenschaften zu einer bewundernswerten Vielfalt von Theorien fortentwickelt wurden. Als Grundlage für einen Unterricht, der das Fach authentisch widerspiegelt, kommen daher weder die „Neue Mathematik“, noch Listen „operationaler Lernziele“, noch Listen von „Kompetenzen“, sondern nur die historisch gewachsenen und beziehungsreichen elementaren Strukturen der Mathematik selbst infrage. Diese Strukturen ermöglichen es Lehrerinnen und Lehrern, die Stärken des Kulturfaches Mathematik zur Geltung zu bringen. Da die elementare Mathematik starke Wurzeln in China, Indien, Griechenland und Arabien hat, trägt sie, wenn diese Wurzeln im Unterricht thematisiert werden, wesentlich zur Völkerverständigung bei, was dem Fach in der heutigen gesellschaftlichen Situation besonderes Gewicht verleiht.

Die Hauptaufgabe für die Mathematikdidaktik stellt sich wie folgt dar:

Ausgehend von den für die Allgemeinbildung relevanten elementaren Strukturen der Arithmetik, Zahlentheorie, Geometrie, Algebra, Analysis und Stochastik müssen stufenübergreifend *fachlich-aufbauende, schülerorientierte Lehrpläne und Curricula* entwickelt werden, in denen die Struktur- und die Anwendungsorientierung ausgewogen vertreten sind.

Repräsentativ für eine solche Entwicklungsforschung ist das Werk von Heinrich Winter. Der unter Winters Federführung entstandene Grundschul-Lehrplan von 1985 für Nordrhein-Westfalen zeichnet sich durch vier *stufenübergreifende* Prinzipien aus:

- Das *aktiv-entdeckende Lernen* unter Führung der Lehrperson wird als oberstes Unterrichtsprinzip gesetzt.
- Neben die *Anwendungsorientierung* tritt die *Strukturorientierung*.
- Inhaltliche Lernziele werden ergänzt durch die *allgemeinen Lernziele Mathematisieren, Explorieren, Argumentieren* und *Formulieren*, die Grundprozesse des mathematischen Arbeitens, insbesondere das Problemlösen und Beweisen, widerspiegeln und *für alle Stufen maßgeblich* sind. Allgemeine und inhaltlichen Lernziele werden wechselseitig aufeinander bezogen (Winter 1975/2012).
- Die Inhalte werden *fachlich-aufbauend* beschrieben.

Im Winter-Lehrplan ist der Ausgleich zwischen "Disziplin" und "Freiheit" durch die Verbindung von Fachstrukturen mit aktiven Lernformen in mustergültiger Weise eingefangen. Dieser Punkt verdient besondere Beachtung über den Mathematikunterricht hinaus. Der Mathematiker und Philosoph A.N. Whitehead hat vor fast 100 Jahren ein zeitloses Prinzip für die Erziehung formuliert (Whitehead 1932, 47):

Das Ziel einer idealen Erziehung sollte sein, Disziplin bewusst mit Freiheit, und umgekehrt Freiheit bewusst mit Disziplin zu verbinden.

Erfolgreiches Lernen von Mathematik steht und fällt in besonderer Weise mit dem Ausgleich von Disziplin und Freiheit. Es ist kein Zufall, dass das Wort "Disziplin" zwei Bedeutungen hat. Einerseits spricht man von "Disziplin im Verhalten", andererseits von "Fachdisziplin". Die alten Pädagogen wussten noch, dass diese zwei Aspekte sich gegenseitig stützen. Heute scheint diese Einsicht vergessen.

Heinrich Winter hat im Laufe von Jahrzehnten zahlreiche konzeptuelle und inhaltliche Beiträge zum Mathematikunterricht geleistet, die von der Grundschule, über die berufliche Erstausbildung und das Abitur bis hinein in die Elementarmathematik reichen. Die Struktur- und Anwendungsorientierung kommen darin *gleichermaßen* zu ihrem Recht.¹⁷ Winters Werk, das sich durch philosophische Tiefe auszeichnet, bietet also für die Lehrplan- und Unterrichtsentwicklung in Deutschland eine *stufenübergreifende Orientierung* für eine echte *inhaltliche* Reform. Bei der Ausarbeitung kann man auf die Leistungen der fachlich fundierten Mathematikdidaktik zurückgreifen, der naturgemäß die führende Rolle in der Unterrichtsentwicklung gebührt. Man kann dabei die heutigen digitalen Werkzeuge (Software für dynamische Geometrie, Geogebra, CAS-Systeme, etc.) produktiv nutzen, die auf voll auf die klassischen Inhalte zugeschnitten sind.

Ein fachlicher Aufbau impliziert, dass bei der Einführung neuer Stoffe immer auf tragfähige Voraussetzungen zurückgegriffen werden kann, was für den Aufbau von Verständnis entscheidend ist. Der amerikanische Lernpsychologe David Ausubel hat einem seiner Bücher in diesem Sinn folgenden Grundsatz vorausgestellt (Ausubel 1968):

Wenn ich die Lernpsychologie auf einen Satz reduzieren müsste, würde ich sagen: Ermittle die Vorkenntnisse der Lernenden und richte deinen Unterricht danach aus.

¹⁷ Bereits in Winter (1976) wird die Modellbildung als grundlegender Rahmen für Anwendungen der Mathematik ausführlich beschrieben und an substanziellen Unterrichtsbeispielen erläutert.

Fachlich-aufbauende Curricula¹⁸ bieten darüber hinaus für das Lehren und Lernen einen weiteren unschätzbaren Vorteil: Sie sorgen für eine fortgesetzte Wiederholung und Konsolidierung des erworbenen *Wissens*. Das gilt insbesondere für Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten (z.B. Einmaleins, Zehnersystem, Rechenregeln, Termumformungen), die sicher und flüssig beherrscht werden müssen, was ein gewisses Maß an Automatisierung erfordert. Wenn die Schüler dazu noch lernen, ihr Wissen bei der Erforschung innermathematischer und realer Situationen intelligent anzuwenden, sich dabei im Denken üben (auch „zur Ehre des menschlichen Geistes“) und die Schönheit der Mathematik¹⁹ erfahren, erwerben sie eine *solide mathematische Bildung*, die den Namen wirklich verdient und gute Voraussetzungen sowohl für die berufliche Erstausbildung als auch das Studium schafft. Für Lehrer und Schüler sind solche Curricula ein Segen.

Die Arithmetik, die elementare Zahlentheorie und die Elementargeometrie sind reich an Strukturen und Anwendungen. Sie verkörpern daher die Mathematik mustergültig. Da sich diese Bereiche in engster Verbindung mit den elementaren Strukturen der Naturwissenschaften und der Technik entwickelt haben, sind sie im Hinblick auf MINT tragende Säulen. Darüber hinaus beinhalten sie ein unerschöpfliches Repertoire von Aufgaben zur Förderung des mathematischen Nachwuchses, wie man an den weltweit durchgeführten mathematischen Schülerwettbewerben ablesen kann. Ein fachlich-aufbauendes Curriculum, das sich an den elementaren Strukturen der Mathematik orientiert, liegt also auch im ureigenen Interesse der mathematischen Spezialisten. Warum die DMV dafür nicht mit Nachdruck eintritt, ist unverständlich.

Namentlich in der Mathematik lassen sich die Lernziele sehr genau beschreiben. Die Behauptung der Bildungsforscher, dies sei erst durch die „Kompetenzorientierung“ möglich, zeugt von blankem Unverstand. Mit der „Kompetenzorientierung“ wird auch suggeriert, dass eine einmal erreichte und „gemessene“ „Kompetenz“ Bestand habe. Dass Wissen auch wieder vergessen werden kann, kommt in den „Kompetenzmodellen“ gar nicht vor. Bei fachlich-aufbauenden Curricula wird dagegen systematisch für stetige Wiederholung gesorgt. Das ist ein ganz entscheidender Punkt.

Die angemessene Form der Qualitätssicherung ist bei fachlich-aufbauendem Lernen die *systemische Qualitätssicherung*, die der amerikanische Mathematikdidaktiker Howard Fehr prägnant beschrieben hat (Fehr 1955):

Während des Unterrichts müssen die Überlegungen der Kinder ständig beobachtet und bewertet werden. Schriftliche Tests reichen hierfür nicht aus. Häufige mündliche Erklärungen bilden eine bessere Grundlage um das Verständnis zu überprüfen. Aber im Hinblick auf den Lernprozess ist es noch wichtiger, dass die Kinder aus eigenem Antrieb und unter Führung der Lehrkraft ihren Lernfortschritt ständig selbst einschätzen, ihre eigenen Stärken und Schwächen erkennen und durch aus dem Unterricht erwachsene Tests erkennen, wo sie stehen und selbst die Hilfe anfordern, die sie benötigen. Wir müssen die Kinder mehr und mehr dazu bringen, selbst Verantwortung für ihre

¹⁸ Als voll ausgearbeitetes Beispiel sei die fachlich-aufbauende Entwicklung des Rechenunterrichts der Grundschule von Klasse 1 bis 4 in Wittmann & Müller 2018/19 genannt.

¹⁹ Der Schriftsteller Botho Strauß antwortete in einem Interview auf die Frage, was ihm heutzutage fehle, trocken: „Die Schönheit“.

Lernfortschritte zu übernehmen. Das ist ein seit Langem vernachlässigtes Ziel des Unterrichts.

In Richtung dieser *systemischen Qualitätskontrolle* sollte die Bildungsadministration in Kooperation mit der *konstruktiven mathematikdidaktischen Entwicklungsforschung* und der Lehrerschaft tätig werden. Um zu überprüfen und sicherzustellen, dass z.B. Strukturen wie das Einspluseins, das Einmaleins, die schriftlichen Verfahren, die Bruchrechnung, der Dreisatz, die Satzgruppe des Pythagoras, die Lösung linearer Gleichungssysteme usw. von den Schülern beherrscht werden, bedarf es keiner Bildungsforschung. Das können die Schulen selbst in Verbindung mit der Schulaufsicht leisten, wie es sich in der Vergangenheit bestens bewährt hat.

Die Bildungsministerien sollten aber nicht nur Lehrpläne erlassen, die stufenübergreifend das *fachlich-aufbauende Lernen* fördern, sondern darauf hinwirken, dass in der Schul- und Unterrichtsorganisation umgesteuert wird. Lehrpersonen sollte es wieder möglich sein, ihre Kräfte *in allererster Linie auf die fachliche Förderung der Schüler* zu konzentrieren. Das ist heute, besonders auch in der Grundschule, vielerorts nicht mehr möglich, weil pädagogische Ziele und von der Politik gesetzte Rahmenbedingungen fachliche Lernziele als zweitrangig erscheinen lassen und in den Hintergrund drängen.

Peter Drucker, lange für den Wirtschaftsteil der *New York Times* verantwortlich, hat für die USA Folgendes festgestellt (Drucker 1993, 291):

Dass pädagogischen Zielen der Vorrang vor fachlichen Lernzielen eingeräumt wurde, war ein Hauptgrund für den Niedergang der amerikanischen Grundbildung und damit für die Krise der Allgemeinbildung in den USA. Kinder der Ober- und Mittelklasse erwerben diese Allgemeinbildung noch. Diejenigen, die sie am nötigsten hätten, erwerben sie nicht: Kinder aus armen Familien und Ausländerkinder.

Fachlich-aufbauendes Lernen muss für die allgemeinbildende Schule daher das A und O sein, gerade im Hinblick auf die sozial benachteiligten Schülerinnen und Schüler – und zwar schon vom Kindergarten an. Die Förderung der sog. „Kulturtechniken“ muss in den Grundschulen absolute Priorität haben.

Zu dieser fachlichen Orientierung gehört auch, dass die Lehrpersonen im Unterricht eine führende Rolle einnehmen und nicht auf eine Rolle als "Lernbegleiter oder "Coach" reduziert werden. John Dewey (1925) hat sich dazu schon vor 100 Jahren klar geäußert:

*Die Befürworter individueller Lernprozesse argumentieren oft folgendermaßen:
Gebt den Kindern gewisse Materialien, Werkzeuge, Hilfsmittel und lasst sie damit nach ihren ganz individuellen Wünschen umgehen und sich frei entwickeln. Setzt den Kindern keine Ziele, gebt ihnen keine Verfahren vor. Sagt ihnen nicht, was sie tun sollen. All dies wäre ein ungerechtfertigter Eingriff in ihre heilige Individualität, denn das Wesen der Individualität ist es gerade, selbst die Zwecke und Ziele zu bestimmen.
Ein solcher Standpunkt ist aber töricht [stupid]. Denn wenn man ihn einnimmt, versucht man etwas Unmögliches, was immer töricht ist, und man missversteht die Bedingungen für selbstständiges Denken. Es gibt viele Möglichkeiten, offene Angebote wahrzunehmen und irgendetwas damit zu machen, aber es ist so gut wie sicher, dass diese eigenen Versuche ohne Anleitung erfahrener Lehrer zufällig, sporadisch und ineffektiv sein werden.
Niemand würde bezweifeln, dass die persönliche Entwicklung in irgendeinem Lebensbereich durch die Nutzung der von anderen gesammelten Erfahrungen gefördert wird. Niemand würde auch ernsthaft vorschlagen, dass die Ausbildung z.B. von Schreinerlehr-*

lingen beim Nullpunkt beginnen solle, d.h. ohne den Lehrlingen Wissen über Mechanik, den Gebrauch von Werkzeugen, die Kenntnis von Materialien usw. zu vermitteln. Niemand käme auch auf die Idee, dass ein Schreinermeister, wenn er seinem Lehrling dieses Wissen vermittelt, den persönlichen Stil des Lehrlings einengen und seine individuelle Entwicklung behindern würde. Lehrpersonen haben dasselbe Recht und die dieselbe Pflicht, die Lernenden anzuleiten, wie ein Handwerksmeister seine Lehrlinge.

Für die Praxis bieten fachlich-aufbauende Lehrpläne und danach entwickelte Unterrichtswerke einen weiteren Vorteil: Sie liefern konkrete Vorgaben für den Unterricht und ersparen es den Lehrpersonen, Zeit auf die Erstellung schuleigener Curricula und fragwürdiger „Kompetenz“-Dokumentationen zu verschwenden, was unproduktiv ist und die ohnehin bestehenden Belastungen der Lehrpersonen in unsinniger Weise erhöht.

Der fachliche Aufbau, der sich an den klassischen Gebieten der Mathematik orientiert, hat einen weiteren wichtigen Vorteil: Diese Gebiete sind inhaltlich so reich, dass sie ein unerschöpfliches Reservoir für Klassenarbeiten liefern, für deren Bearbeitung die Schülerinnen und Schüler im vorhergehenden Unterricht durch ähnliche Aufgaben bestens vorbereitet worden sind. Auf diese Weise wird *echter* Vertrauensschutz gewährleistet, in striktem Gegensatz zu zentralen Tests.

Angesichts des heutigen Lehrermangels muss noch ein Punkt hervorgehoben werden, der für fachlich-aufbauendes Lernen spricht: Diese Orientierung verleiht dem Lehrberuf ein spezielles professionelles Profil und macht ihn intellektuell attraktiv. Sie stärkt auch die Position der Lehrerinnen und Lehrer gegenüber den Schülern und gegenüber den Eltern. In dieser Hinsicht ist in den letzten Jahren vieles aus dem Ruder gelaufen, was dem Ansehen dieses Berufsstandes geschadet hat und vitale junge Leute abhält, diesen Beruf zu ergreifen.

Nachwort

Aufgrund der in diesem Beitrag beschriebenen Erfahrungen erscheint es nicht abwegig, dem positiven Vorschlag am Ende des Beitrags eine negative Perspektive gegenüberzustellen. Es wäre keineswegs verwunderlich, wenn sich statt einer Konsolidierung nicht nur eine noch rigidere Betonung von „Anwendungen“, sondern weitere Fehlentwicklungen nach den oben beschriebenen Mustern ergeben würden. Man braucht nicht lange zu suchen, zwei Kandidaten stehen schon bereit: *die Digitalisierung* und *KI*.

In den Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen haben digitale Medien längst Einzug gehalten. Es wäre daher nur folgerichtig, diese Entwicklung ohne Reformhysterie ruhig und stetig zu unterstützen und damit *solide schulische Voraussetzungen für die Digitalisierung* zu schaffen, die für Wirtschaft und Gesellschaft ohne jeden Zweifel *existenziell* ist. Aber dazu könnten Einsicht und Geduld fehlen. Aus der Industrie kommt massiver Druck zu einer beschleunigten "Digitalisierung" auch in den Schulen. In den Ministerien breitet sich ein Reformfieber wie zu Zeiten der "Mengenlehre" aus. Die Wirkungen der "Digitalisierung" für die Schule werden von den Protagonisten wieder in rosa-roten Farben gemalt, negative Folgen nicht bedacht. Dass eine blind durchgedrückte Digitalisierung die Kulturtechniken und die mathematischen Fähigkeiten nicht fördern, sondern noch mehr untergraben, und dass ein auf Geräte und deren Bedienung fixiertes "Digitalisierungsprogramm" *im Bildungswesen*, wie es insbesondere vom Bundesbildungsministerium gefordert wird, letztlich der Wirtschaft mehr schaden als nützen könnte, scheint

den Protagonisten erneut nicht in den Sinn zu kommen. Entsprechende Kritik wird wie zu Zeiten der "Mengenlehre" ignoriert.

Der FAZ-Herausgeber Jürgen Kaube hat in seinem Buch "Ist die Schule zu blöd für unsere Kinder?" mit guten Gründen die Forderung gestellt, in der Schule die **Denkerziehung** in den Mittelpunkt zu stellen (Kaube 2019). Unter diesem Aspekt müssten bei den Forderungen nach Digitalisierung und KI im Unterricht die Alarmglocken läuten. Bereits bei den digitalen Medien ist die Gefahr groß, dass damit das Denken nicht gefördert, sondern untergraben wird. Eine leistungsfähige Software wie Geogebra kann den eigenständigen Umgang mit Mathematik unterstützen, wie jeder weiß, der mathematisch arbeitet. Man kann digitale Werkzeuge aber auch zur Erstellung von Apps nutzen, die von den Schülerinnen und Schülern nur noch konsumiert werden müssen und ihnen das Denken abnehmen. Bei KI ist diese Gefahr noch viel größer.

Es ist ein Naturgesetz, dass sich das Gehirn nur weiterentwickelt, wenn es gefordert wird, genauso wie Muskeln nur gestärkt werden, wenn sie angestrengt werden. Dieses Gesetz zu missachten ist der größte Fehler, den man in der Bildungspolitik machen kann.

Mit dieser kritischen Sichtweise wird die *existenzielle Bedeutung* von Digitalisierung und KI für Wirtschaft und Industrie in keiner Weise bestritten, **ganz im Gegenteil**: Es wird vielmehr ein Weg zur besseren Nutzung der digitalen Werkzeuge im späteren Berufsleben aufgezeigt. *Es ist nämlich keine Frage, dass Beschäftigte, die in der Schule gelernt haben zu denken, mit diesen Werkzeugen erfolgreicher arbeiten können, als Beschäftigte, die in der Schule digitale Medien, die technisch sowieso rasend schnell überholt sind, nur konsumiert haben.*

Quo vadis Bildungspolitik?

Wenn man sich klar macht, dass die deutsche Politik quer über alle Parteien Jahrzehnte lang Milliarden für die Bundeswehr ausgegeben hat, ohne darauf zu achten, dass die Armee wehrfähig ist, ist es nicht mehr so verwunderlich, dass die Politik auch Milliarden für das Bildungssystem und die Bildungsforschung verwendet hat und verwendet, ohne sicherzustellen, dass das Bildungssystem auch seinen Zweck erfüllt. Wenn IQB-Daten ein stetiges Absinken der Fähigkeiten von Grundschulern in Deutscher Sprache und Mathematik oder PISA-Daten ein stetiges Absinken im Bereich MINT feststellen, reagiert die Bildungspolitik zwar, versäumt es aber, den Problemen wirklich auf den Grund zu gehen. Dass frühere falsche Weichenstellungen für das Absinken des Niveaus zumindest wesentlich mitverantwortlich sind, die Probleme also zu einem großen Teil hausgemacht sind, wird total übersehen.

Der blinde Glaube an das aus den USA importierte Bildungsmonitoring und damit in die Bildungsforschung wird vermutlich durch die zunehmende Amerikanisierung unserer Republik verstärkt, die schon *Rolf Winter* als für unser Gemeinwesen nicht zuträglich kritisiert hat (Winter 1995, Deneen 2019). Es ist noch nachvollziehbar, dass die Zwänge im Bereich der Wirtschaft so groß sind, dass man den rheinischen Kapitalismus nicht mehr gegenüber dem neoliberalen amerikanischen Kapitalismus aufrechterhalten kann, und dass im Bereich der Kultur Zugeständnisse an die amerikanische Popkultur gemacht werden müssen. Im Bereich der Bildung wäre die Bundesrepublik und wären die Bundesländer, die stolz auf ihre „Kulturhoheit“, einschließlich der Hoheit im Bildungswesen, pochen, aber

autonom. Die eigene gute Tradition gering zu schätzen und aufzugeben, war und ist eine Politik, mit der man nicht „den Nutzen des deutschen Volkes mehrt und Schaden von ihm wendet“, wie es im Amtseid heißt, den Ministerinnen und Minister bei Amtsantritt ablegen müssen, sondern das Gegenteil bewirkt.

Der Unterricht, den der Autor in den 1940er und 1950er Jahren in der Volksschule und einem musischen Gymnasium erhalten hat, war wie schon Jahrzehnte davor von einem breiten Bildungsbegriff getragen. Er hat jungen Menschen durch substanzielle Inhalte nicht nur anwendbares Wissen vermittelt, sondern sie auch angeregt und befähigt, selbständig zu denken. Die Orientierung an einem breiteren Bildungsbegriff führte auch zu einem insgesamt höheren intellektuellen Niveau, von dem Technologie und Wirtschaft entscheidend profitiert haben. Eine breitere Bildung ist kein überflüssiger Luxus, sondern war und ist ein entscheidender Vorteil für Technologie und Wirtschaft.

Aus Verantwortung für die Zukunft unserer Kinder und Enkelkinder ist daher ein Richtungswechsel, *der an der Wurzel ansetzt*, dringend erforderlich. Das dafür in den Abschnitten 4 und 5 beschriebene Konzept lässt sich auf folgende vier Kernpunkte konzentrieren:

1. *Priorität auf fachlichem Lernen und Abkehr von Organisations- und Unterrichtsformen, die fachliches Lernen einschränken oder gar behindern*
2. *Entwicklung fachlich-aufbauender stufenübergreifender Lehrpläne, die*
 - a) der Denkerziehung wieder Raum geben,
 - b) Anwendungen auf Strukturen gründen,
 - c) Anforderungen im Bereich MINT systematisch berücksichtigen,
 - d) Rechnen als Kulturtechnik ernst nehmen
3. *Etablierung einer kleinen aber feinen, **fachlich authentischen** sprachlichen und mathematischen Frühförderung im Kindergarten, die allen Kinder gute Voraussetzungen für die Schule vermittelt und damit Lehrerinnen und Lehrern in der Grundschule die Arbeit wesentlich erleichtert*
4. *Stärkere Gewichtung der Elementarmathematik in der Lehrerausbildung aller Stufen mit Blick auf die Bedeutung der Mathematik für die Allgemeinbildung.*

Der Punkt 1 fällt, soweit das fachliche Lernen und die Schulorganisation betroffen ist, in den Zuständigkeitsbereich der Politik. Für die Punkte 2 und 3 ist die Politik sogar ganz alleine zuständig. Was den Punkt 4 betrifft, könnte die Politik zumindest Einfluss auf die Ausbildungspläne in beiden Phasen der Lehrerbildung nehmen.

Wenn ein solches Konzept entschlossen umgesetzt und administrativ nachhaltig gestützt würde, würden langfristig *alle* davon profitieren. Die Kinder würden in der Grundschule mit besseren Voraussetzungen starten, die Grundschüler mit besseren Voraussetzungen in die weiterführenden Schulen übertreten und deren Absolventen würden eine berufliche Erstausbildung und ein Studium mit besseren Voraussetzungen antreten, als das bei allen Übergängen heute weithin der Fall ist. Die Mathematikdidaktik würde durch ein solches Konzept gezwungen, sich wieder auf *fachliche Inhalte* zu besinnen und ihrer Verantwortung für eine *professionelle Ausbildung* zum Lehrberuf nachzukommen.

Es wird nicht einfach sein, die heutige Gesellschaft für einen solchen Richtungswechsel zu gewinnen, der auch eine andere Einstellung zum Lehren und Lernen impliziert. Die „Förderung höherer geistiger Fähigkeiten“, angefangen bei den Kulturtechniken, gehört leider nicht mehr zu den Prioritäten, die heute gesetzt werden. Man braucht sich nur die Fernsehprogramme und das Internet anzuschauen (Postman 1988). Schulischen Anforderungen stehen viele Schüler und Schülerinnen und Eltern generell defensiv gegenüber. Man wünscht sich gute Noten bei geringem Aufwand und übt ggf. Druck auf Lehrpersonen, die Schulbehörden und die Politik aus. Die allgegenwärtige Forderung nach „Lebensnähe“ der Lehrpläne steht der „Entwicklung höherer geistiger Funktionen“ diametral entgegen.

Inzwischen begreifen aber immer weitere Kreise, dass man mit dieser Einstellung den Ast absägt, auf dem man sitzt, und dass es so nicht weitergehen kann.

*Das Grundübel ist heute die Missachtung des **Eigenwerts** der schulischen Bildung. Unter allen negativen Begleiterscheinungen des Liberalismus ist dies vermutlich die gravierendste (Deneen 2019, Kap. 3 und 5). Deutschland gefährdet damit seine wirtschaftliche und gesellschaftliche Basis, weil für unser rohstoffarmes Land eine solide Bildung der entscheidende Produktionsfaktor und Voraussetzung für erträgliche gesellschaftliche Verhältnisse ist. Da müsste bei der Aufklärung der Bürgerinnen und Bürger unter bewusstem Bezug auf die erfolgreiche deutsche Bildungstradition angesetzt werden.*

Das Zeitfenster hierfür ist nicht mehr lange offen.

Literatur

- Ahlfors, L. et al. (1962): On the Mathematics Curriculum of the High School. *American Mathematical Monthly* 69, No.3, 189 – 193
- Ausubel, D. (1968): Educational Psychology: a cognitive view. Holt, Rinehart and Winston: New York.
- Association of Teachers of Mathematics (ATM) (1967): *Notes on Mathematics in Primary Schools*. Cambridge: CUP (dt. *Modelle für den Mathematikunterricht der Grundschule*. Stuttgart: Klett 1970)
- Bakker, A., Cai, J. & Zenger, L. (2021): Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 107, 1 – 24
- Bandelt, H.J. (2015): Modellbildung versus Modellisieren und Scheinmodellierung. *Mitteilungen der GDM* 99, 6 – 18
- Besuden, H. (2007): Hat die „Neue Mathematik“ zur mathematischen Bildung beigetragen? In: Peter-Koop, A. & Bikner-Ahsbals, A. (Hg.) (2007). *Mathematische Bildung – Mathematische Leistung*. Hildesheim: Franzbecker
- Beutelspacher, A. (1997): Welches mathematische Verständnis benötigen Nutzer von Mathematik? Erfahrungen aus der industriellen Praxis. In: Biehler, R. & Jahnke, H.N. (Hg.): *Mathematische Allgemeinbildung in der Kontroverse. Occasional Paper* 163, Bielefeld: IDM, 7 – 12
- Blechman, I. L.; Myskis, A.D.; Panovko, J. G. (1984): Angewandte Mathematik: Gegenstand, Logik, Besonderheiten. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften
- Blum, W. et al. (Hg.) (2006): *Bildungsstandards konkret. Sekundarstufe: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen Scriptor

- Bourbaki, N. (1974): Die Architektur der Mathematik. In: Otte, M. (Hg.): *Mathematiker über Mathematik*. Heidelberg/Berlin/New York: Springer, 140 – 159
- Brodkorb, M. (2016). Von der Dynamis zur Energia. Was wir von Aristoteles über Bildung und Kompetenz lernen können. In: Zierer, K., Kahlert, J. & Burchardt, M. (Hg.) (2016): *Die pädagogische Mitte: Plädoyers für Vernunft und Augenmaß in der Bildung*. Bad Heilbrunn: Klinckschardt, 21 – 37
- Chesterton, G.K. (1927): *Culture and the Coming Peril*. London: University Press
- Damerow, P. (1977): *Die Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I. Fallstudie zum Einfluss gesellschaftlicher Rahmenbedingungen auf den Prozeß der Curriculum-Reform*. Stuttgart: Klett-Cotta
- Deneen, P. (2019): *Warum der Liberalismus gescheitert ist*. Salzburg–Wien: Mury Salzmann
- Dewey, J.: Individuality and Experience. In: Dewey, J., *The Later Works 1925 – 1927*, vol. 2. Carbondale, Ill: SIU Press 1988, 55 - 61.
- Dieudonné, J. (1955): L'abstraction en mathématiques et l'évolution de l'algèbre. In: Beth, E.W., Dieudonné, J. et al.: *L'enseignement des mathématiques*. Vol. 1: Nouvelles perspectives. Neuchâtel: Delachaux&Niestlé, 47 – 61
- Dieudonné, J. (1961): New Thinking in Schoolmathematics. In: OECD: *New Thinking in Schoolmathematics*. Paris: OECD, 31 – 45
- Donaldson, M. (1982): *Wie Kinder denken*. Bern/Stuttgart/Wien: Haupt
- Drucker, P.F (1993): *Die post-kapitalistische Gesellschaft*. Düsseldorf: Econ
- EDK (2014): Lehrplan 21. <http://v-ef.lehrplan.ch/index.php?code=b|5|0&la=yes>
- Fehr, H. (1955): A philosophy of arithmetic instruction. *Arithmetic Teacher* 2, No. 2, 27 – 32
- Freudenthal, H. (1963): Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematikunterricht*, H. 4, S. 5 – 29
- Freudenthal, H. (1974): Lernzielfindung im Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Pädagogik* 20, 719 – 738
- Gagné, R.M. (1973): *Bedingungen des menschlichen Lernens*. Hannover: Schroedel
- Görke, L. (1967): *Mengen, Relationen, Funktionen*. Berlin: Volk und Wissen
- Griesel, H. (1971 – 1974): *Neue Mathematik für Lehrer und Studenten*. 3 Bde. Hannover: Schroedel
- Hamann, T. (2018): *Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland*. Siegen: Universitätsverlag
- Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner 1899
- Kaenders, R. & Weiss, Y. (2107): Mathematische Schneeschmelze. *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung* 23, H. 2, 82 – 89
- Kaube, J. (2019): *Ist die Schule zu blöd für unsere Kinder?* Berlin: Rowohlt
- Krautz, J. & Burchardt, M. (Hrsg.): *Time for Change? Schule zwischen demokratischem Bildungsauftrag und manipulativer Steuerung*. München: kopaed
- Kroll, W. (1997): Thesen zur gymnasialen Mathematiklehrausbildung. In: Biehler, R. & Jahnke, H.N. (Hg.): *Mathematische Allgemeinbildung in der Kontroverse. Occasional Paper* 163, Bielefeld: IDM, 84 – 88
- Kühnel, W. (2015): Modellierungskompetenz und Problemlösekompetenz im Hamburger Zentralabitur. *Math. Semesterberichte* 62, H.1, 69 – 82
- Lafforgue, L. (2007): Les savants et l'école. In: Lafforgue, L. & Lurçat, L. (Hg.): *La débâcle de l'école. Une tragédie incomprise*. Paris: F.X. Guibert 2007, chapitre X, 177 – 201 (Deutsche Übersetzung www.Mathe2000.de/Downloads).

- Piaget, J. (1955): Les structures mathématiques et les structure opératoires de l'intelligence. In: Beth, E.W. et al.: *L'enseignement des mathématiques. Vol. 1: Nouvelles perspectives*. Neuchâtel: Delachaux&Niestlé, 11 – 33
- Liessmann, K.P. (2014): *Geisterstunde. Die Praxis der Unbildung*. Wien: Zsolnay
- Müller, G.N. & Wittmann, E.Ch. (1981). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Prinzipien, Inhalte, Beispiele*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000): *Principles and Standards of Schoolmathematics*. Reston, Va: NCTM
- Novikov, S. (2004): The Second Half of the 20th Century and its Conclusion: Crisis in the Physics and Mathematics Community in Russia and in the West. *AMS Translations*, vol. 212, (2), 1 – 31
- OECD (2000): *Definition und Auswahl von Schlüsselkompetenzen*.
<https://www.oecd.org/pisa/35693281.pdf>
- Ossermann, R. (1983): The Fall and Rise of Geometry. In: Zweng, M. et al. (eds.): *Proceedings of ICME 4*. Boston/Basel/Stuttgart: Birkhäuser, 167 – 171
- Postman, N. (1988): *Wir amüsieren uns zu Tode*. Frankfurt: Fischer
- Remus, D.& Walcher, S. (2016): Die Entkernung des Mathematikunterrichts. *profil*/Juli-August 2016, 16 – 19
- Sawyer, W.W. (1955): *A Prelude to Mathematics*. Harmondsworth: Pelican Books
- Schoene, H. (Hg.)(1963): *Synopsis für moderne Schulmathematik*. Frankfurt: Diesterweg
- Stewart, I. (1995): Bye bye Bourbaki, Paradigm Shifts in Mathematics. *The Mathematical Gazette* 79, No. 486, 496 – 498
- Thom, R. (1973): Modern Mathematics: does it exist? In: Howson, A.G. (ed.): *Developments in Mathematical Education*. Proc. ICME 2, Cambridge: CUP, 194 – 209
- Thurston, W. (1994): On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society* 30, No.2, 161 – 177
- Türcke, Ch. (2016), zit. nach Süddeutsche Zeitung vom 10.02.2016
- Weiss, Y. & Kaenders, R. (2018). Die Kompetenzfalle. *Spektrum der Wissenschaft*, H. 9, 80 – 85
- Weiss, Y. & Kaenders, R. (2019). Permanent kompetent durch Qualitätsmanagement. In: Stomporowski, S. et al. (Hg.) (2019): *Bildung – noch immer ein wertvoller Begriff?!* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht unipress, 57 – 71
- Whitehead, A.N. (1911): *Introduction into Mathematics*. London: Williams and Norgate
- Whitehead, A.N. (1932): *The Aims of Education*. London: Williams and Norgate
- Winter, H. (1976): Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. *Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule*, H. 4, 337– 353
- Winter, H. (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. *ZDM* 7, 106-116. Nachdruck in: Müller, G.N., Selter, Ch. & Wittmann, E.Ch. (2012): *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben*. Stuttgart: Klett, 41 – 60
- Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM* 6, 37 – 46
- Winter, H. (2015): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Wiesbaden: Springer
- Winter, R. (1995); *Little America. Die Amerikanisierung der deutschen Republik*. Hamburg: Rasch und Röhring
- Wittenberg, A.I. (1963): *Bildung und Mathematik*. Stuttgart: Klett-Cotta

- Wittmann, E.Ch. (1974): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg
- Wittmann, E.Ch. (2014): Von allen guten Geistern verlassen. Fehlentwicklungen der Bildungspolitik am Beispiel Mathematik. *Profil* 6/2014, 20 – 30
- Wittmann, E.Ch. (2016): Wie die mathematische Community der Abwicklung des Unterrichts entgegenwirken könnte – wenn sie wollte. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg XXXVI*, 81-102
- Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N (2018/19): *Handbuch produktiver Rechenübungen*, 2 Bde. Seelze: Friedrich, Fachbuchreihe Klett/Kallmeyer
- Ziegler, G. (2008): Über das Buch der Beweise. Was ist Mathematik? Versuch einer Antwort in vier Thesen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 61, H.7. 407 – 413