Offene Sachaufgaben – jenseits von „Fermi-Aufgaben“

Erich Ch. Wittmann
mit einem Praxisbeispiel von Stephan Kern

www.Mathe2000.de

Einstieg:

Warum ist es notwendig an bildungspolitischen
und didaktischen Entwicklungen Kritik zu üben
und warum ist der heutige Vortrag riskant?

Erich Ch. Wittmann: Von allen guten Geistern verlassen:
Fehlentwicklungen im Bildungssystem am Beispiel Mathematik.
Profil 6/2014, S. 20 – 30
Herunter zu laden von Website Mathe 2000+/Downloads

Darin Kritik an falsch verstandener
Anwendungsorientierung einschließlich Fermi-Aufgaben
(die in der Sek I noch ein viel größeres Problem sind)

Beispiel für eine unkritische Akzeptanz von „Fermi-Aufgaben:

Anonymer Autor:

„...also, die Kinder der ersten Klasse an meiner Schule (mittelschwerer Brennpunkt) gehen steil bei Fermi-Aufgaben und machen sich unerhört viele Gedanken zu Lösungsmöglichkeiten und Lösungsansätzen. Natürlich ist es wegen des begrenzten Zahlenraumes nicht ganz einfach, passende Aufgaben zu finden, aber es ist möglich...und es muss noch viel stärker gelenkt und begleitet werden als in den höheren Schuljahren...aber auszahlen tut sich das dann in den folgenden Schuljahren, wenn den Kindern Mathematik nicht nur als Arithmetik oder Geometrie bekannt ist, sondern relativ selbstverständlich auch das Problemlösen eine deutliche Rolle spielt...und die Kinder an meiner Schule haben jede Woche eine Fermi-Stunde...wie gesagt: sie stehen unglaublich drauf... “"

Warnung von Gerhard Müller (in absentia) an den Referenten vor diesem Vortrag:

„Mit Fermi-Aufgaben machen Didaktiker Eindruck bei Lehrern und Außenstehenden, die Lehrer machen damit Eindruck bei den Schülern. So haben alle ihre gewünschte Selbstdarstellung. Der Lerneffekt bei den Schülern ist dagegen gering. Das ist gefährlich, da klassische Inhalte dafür zurückstehen müssen. Die Zeit ist ja begrenzt.
Ich wünsche dir beim Symposium eine fruchtbare Diskussion. Manche Teilnehmer werden merken, dass sie sich von Fermi-Aufgaben haben blenden lassen. Dies kann befreiend wirken, aber auch irritieren und wütend machen. Darum Vorsicht.“

Fermi-Aufgaben, die aus Sicht des Referenten kritisch zu beurteilen sind:

Welche Fläche der Schweiz kann man mit der Samstagsausgabe des Tagesanzeigers überdecken?

Wie viele Grashalme hat der Rasen im Westfalenstadion?

Wie viele Luftballons haben im Schulzimmer Platz?

Wie viele Zähne fallen den Kindern im Laufe eines Schuljahrs aus?

Wie viele Sätze sprichst du in 1 Jahr?

Wie oft sprichst du den Buchstaben e?

– In einem Monat hast du mehr als 1000 Minuten Pause.

– Auf einem Quadratmeter Wiese wachsen weniger als 1000 Grashalme.

– Wenn du alle Spaghetti einer 500 g-Packung hintereinander legtest, dann wäre die Strecke kürzer als 10 Meter.

Diese drei Beispiele sind entnommen der Box: „Kann das stimmen?“ von Silke Ruwisch und Susanne Schaffrath

Aus der Homepage eines Didaktik-Instituts:

Wie oft wird heute in Münster „Süßes oder Saures“ gesagt?

Wie viele Nadeln hat die Tanne auf dem Pausenplatz beim Primarschulhaus?

Eine Schülerlösung aus der 2. Klasse:
Ein ca. 15 cm langes Ästchen hat ca. 160 Nadeln. Ein normaler Ast hat etwa 15 solche Stücke. Ein Hauptast hat durchschnittlich 14 solcher Äste. Der ganze Baum hat etwa 200 Hauptäste.
Wir rechnen:
Ast: 160 * 15 = 2'400
Hauptast: 2'400 * 14 = 33'600
Baum: 33'600 * 200 = 6,72 Millionen Nadeln.
Gerundet sind das etwa 7 Millionen Nadeln. Dieser Baum hat gleich viele Nadeln wie die ganze Schweiz Einwohner.

Auf der gleichen Website wird behauptet:

Fermi-Aufgaben...

... sind realitätsbezogen
... sind zugänglich
... fordern heraus
... sind offen
... fördern Kompetenzen
... erfordern das Vergleichen und Überprüfen
... regen das Weiterfragen an
... öffnen den Blick für die Mathematik in der Welt

Kann das stimmen ?

Grundlage für die Antwort:

Was ist Mathematik?

Mathematik ist die Wissenschaft schöner und nützlicher **Muster und Strukturen**, die aktiv und interaktiv erforscht und angewandt werden.

Charakteristisch für die Mathematik sind **zusammenhängende Theorien** (Zahlentheorie, Geometrie, Algebra, Analysis, Kombinatorik, ...), die sich aus elementaren Wurzeln entwickelt haben. Die sogenannte „Elementarmathematik“ ist die Grundlage für die Allgemeinbildung.

Die reine Mathematik liefert die **Bausteine für die Modellbildung**, ist also für gute Anwendungen unerlässlich. Ohne besondere Pflege der reinen Mathematik lassen sich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (Modellieren, Entdecken, Argumentieren, Kommunizieren) nicht angemessen entwickeln.

Winter: Anwendungs- **und** Strukturorientierung

Bewertungskriterien für Sachaufgaben:

Trägt die Aufgabe zum **Verständnis der Fachstruktur** bei und führt sie **fachlich** weiter?

Handelt es sich um eine **real wirklich bedeutsame** Anwendung mathematischer Kenntnisse (und nicht nur um eine Kuriosität?) Wird dabei **Sachwissen vermehrt**?

Darstellung der Beziehung Mathematik/Realität im Modellierungskreislauf

Aus: G.N. Müller/ E.Ch. Wittmann: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe **1977, Kap. 3.6**

Modell bilden

Situation

Modell

Datenverarbeitung im Modell

Folgerungen für die Situation

interpretieren

Folgerungen im Modell

Ausführliche Diskussion des Sachrechnens im Kap. 3.6 dieses Buches unter dem Aspekt „Öffnung des Sachrechnens“

(Dort Unterscheidung zwischen „echten“ Sachaufgaben, bei denen die Modellbildung ausgeführt wird, und „unechten“ Sachaufgaben, bei denen alle Daten und Fragen vorgegeben sind)

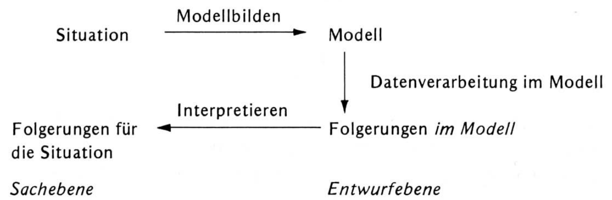
3.6. Anwendungen der Mathematik

Das Thema ,,Anwendungen der Mathematik“ taucht im vorliegenden Buch hier nicht zum ersten Mal auf, sondern ist bereits vorher an markanten Stellen angesprochen worden. In Kapitel 1 war ein eigener Abschnitt fünf Unterrichts*beispielen* für Anwendungen der Mathematik gewidmet. In Kapitel 2 wurden Anwendungen sowohl unter den *Zielen* (vgl. allgemeines Lernziel ,,mathematisieren können“) als auch in ihrer Beziehung zu den *Inhalten* der Grundschulmathematik (deterministische und stochastische Modellbildung mittels arithmetischer, geometrischer, stochastischer und struktureller Ideen) als auch im Zusammenhang mit *Prinzipien* (genetisches Prinzip, insbesondere Prinzip der Beziehungshaltigkeit) aufgeführt. Schließlich sind bei den bisherigen didaktischen Analysen in Kapitel 3 jeweils bestimmte Anwendungssituationen aufgezählt worden, die in die unterrichtliche Behandlung des jeweiligen Themas einbezogen werden können.

Angesichts dieser sichtlich starken Verankerung der Anwendungen in unserem Konzept ist es sicherlich angebracht, daß wir zum Abschluß von Kapitel 3 eine didaktische Analyse der Beziehung zwischen Mathematik und Wirklichkeit sowie der Möglichkeiten einer unterrichtspraktischen Realisierung des Themas ,,Anwendungen“ durchführen.

3.6.1. Grundideen

Unter einer Anwendung der Mathematik auf eine bestimmte Situation der Wirklichkeit (m.a.W. unter dem *Mathematisieren der Situation*) versteht man die Beschreibung der Situation in einem mathematischen *Modell.* Hinter dem Mathematisieren steht das Motiv, eine direkt überhaupt nicht oder praktisch nicht erfaßbare Situation auf dem Weg über ein Modell (als einer Art Ersatzkonstruktion) wenigstens in gewissen Zügen in den Griff zu bekommen und studieren zu können. Folgendes einfache Schema erläutert das Mathematisieren.



Man erkennt eine Trennung in eine *Sachebene* (der die Situation angehört) und eine *Entwurfebene* (der das Modell angehört). Ein erster Übergang führt von der Situation zu einem Modell. Anschließend wird im Modell (als Ersatz für die Situation) gearbeitet. Die Folgerungen werden schließlich in die Sachebene zurückübersetzt.

Bei mathematisch präzisen Modellen kann die Datenverarbeitung im Modell nach mathematisch exakten Verfahren erfolgen, so daß die Folgerungen im Modell hieb- und stichfest sind. Daraus darf aber nicht geschlossen werden, daß die entsprechenden Folgerungen auch für die Situation zutreffen. Denn die Bildung des Modells ist ein nicht exaktes Verfahren und es kann *prinzipiell* nicht sichergestellt werden, daß das Modell die interessie-

Dokument aus dem WS 1977/78:

KONSTRUKTION VON

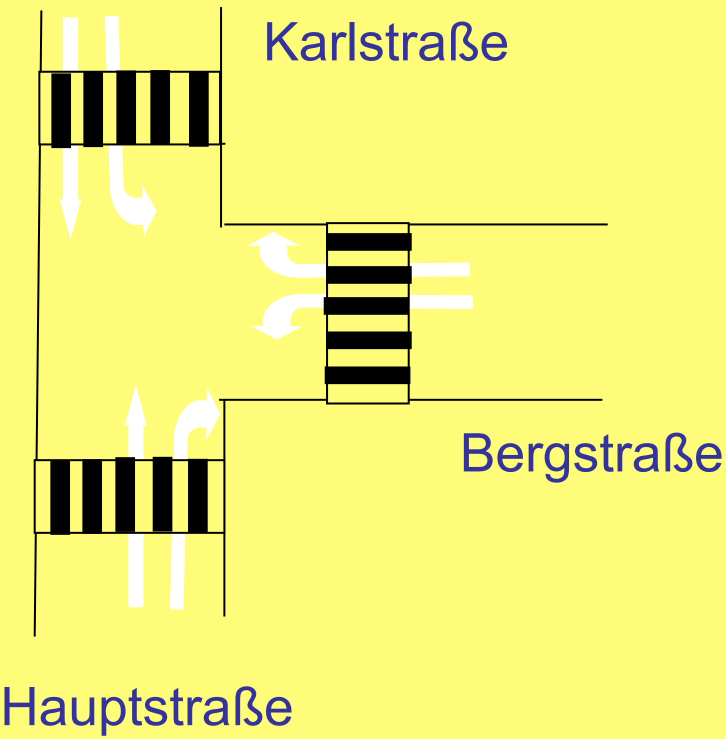
SACHSITUATIONEN

BERICHT ÜBER EIN
PRIMARSTUFENSEMINAR IM WS 1977/78

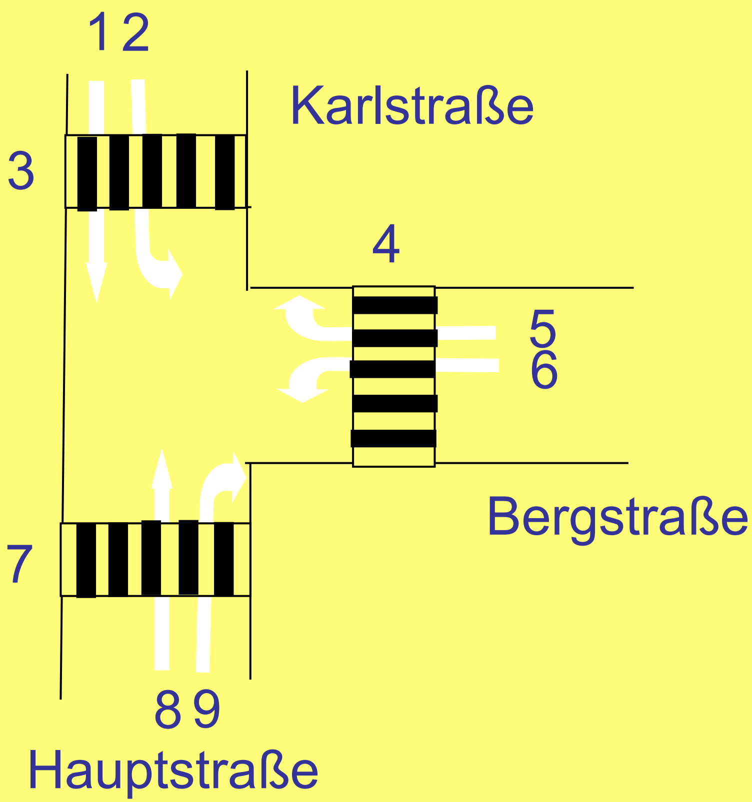
LEITUNG:
PROF. DR. E. WITTMANN

Inhaltsverzeichnis

Musterbeispiel für Modellieren:
Entwurf einer Ampelanlage
(Winter 1975, Müller/Wittmann 1977, S. 122 - 124)



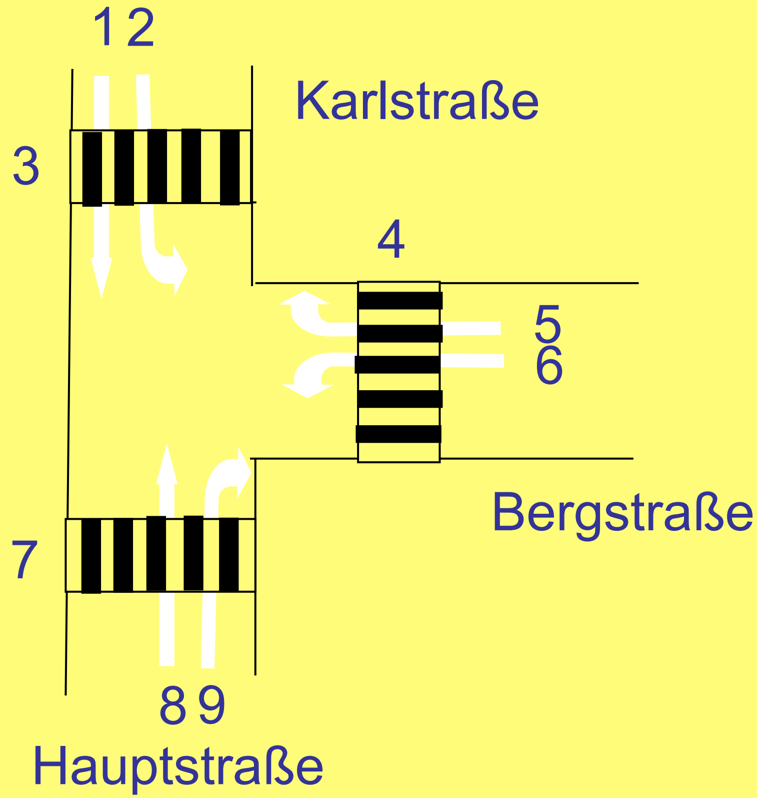
Musterbeispiel für Modellieren:
Entwurf einer Ampelanlage
(Winter 1975, Müller/Wittmann 1977, S. 122 - 124)

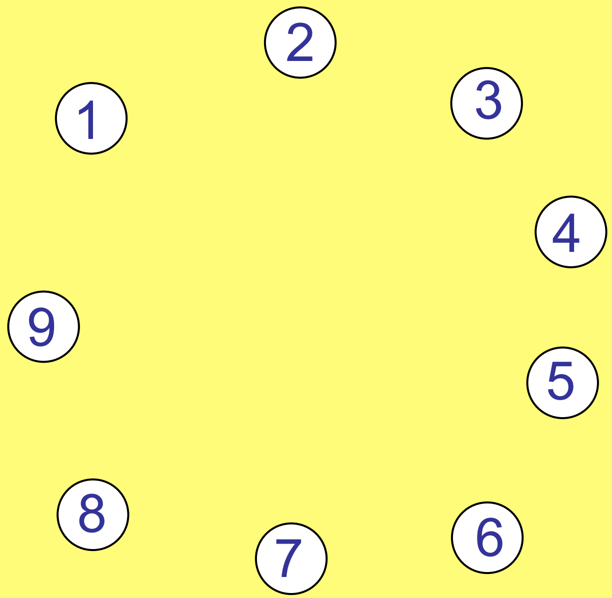


Nummerierung der Verkehrsströme

Musterbeispiel für Modellieren:
Entwurf einer Ampelanlage

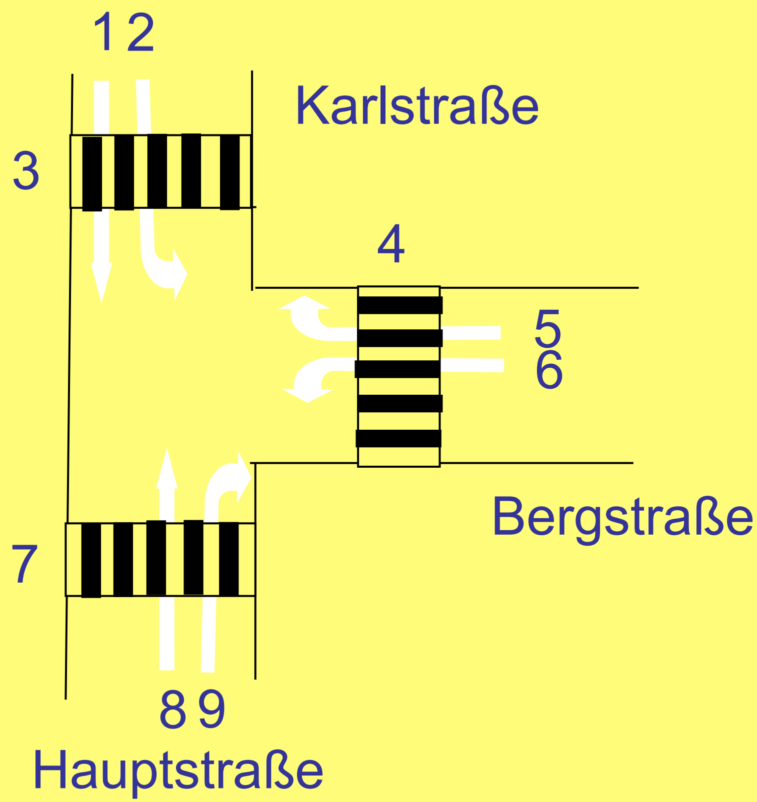
(Winter 1975, Müller/Wittmann 1977, S. 122 - 124)

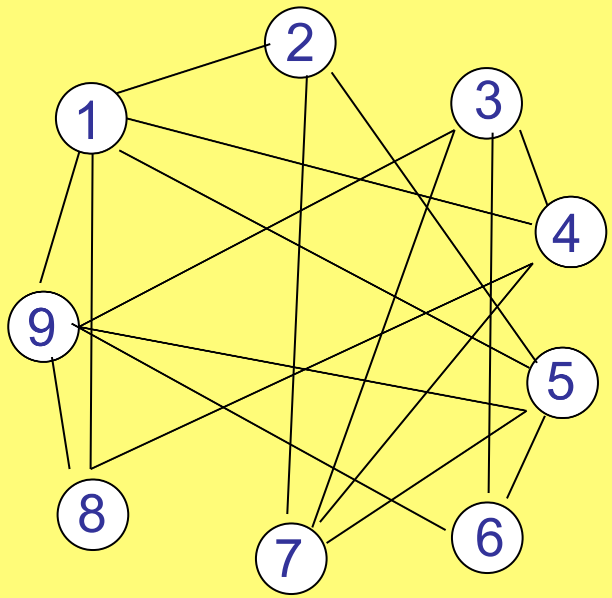




Modellierung durch einen Graphen: Zwei Verkehrs-ströme werden durch eine Line verbunden, wenn sie sich gegenseitig nicht stören

Musterbeispiel für Modellieren: Entwurf einer Ampelanlage
(Winter 1975, Müller/Wittmann 1977, S. 122 - 124)

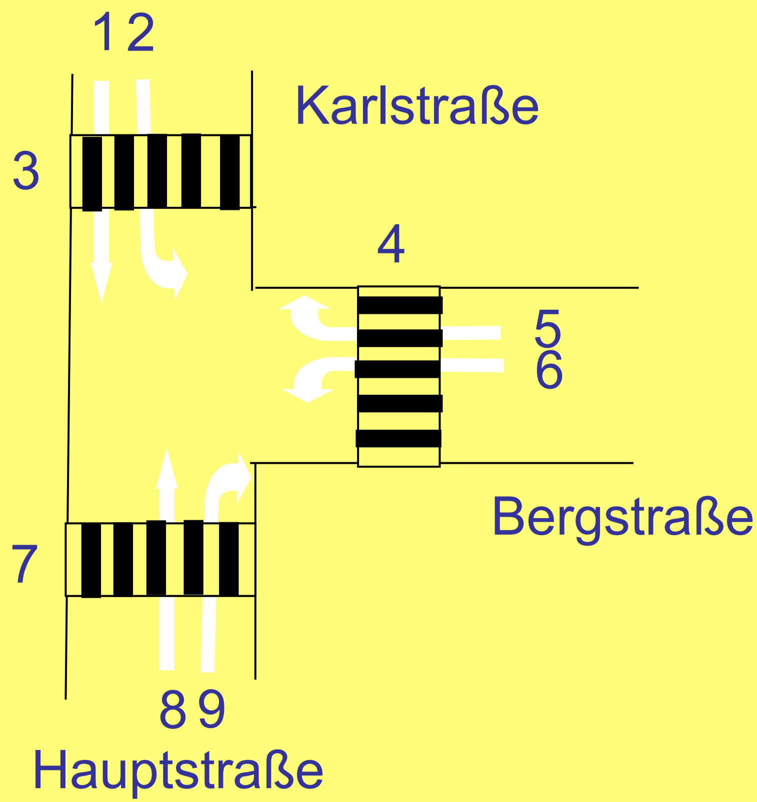


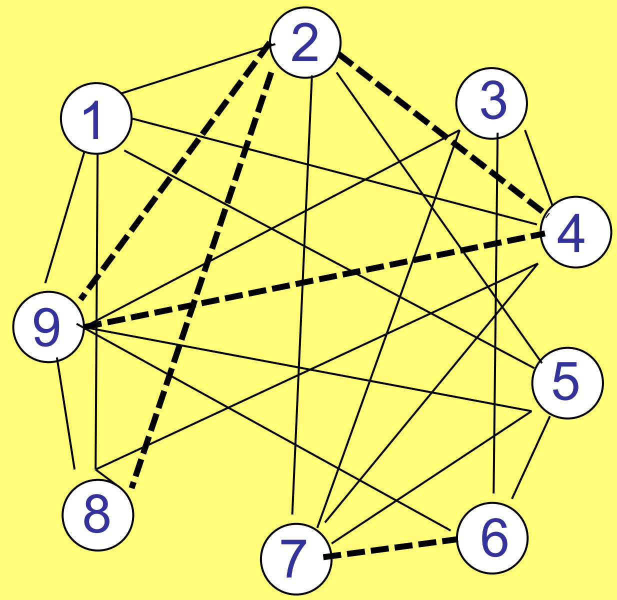


Modellierung durch einen Graphen: Zwei Verkehrs-ströme werden durch eine Line verbunden, wenn sie sich gegenseitig nicht stören

Musterbeispiel für Modellieren:
Entwurf einer Ampelanlage

(Winter 1975, Müller/Wittmann 1977, S. 122 - 124)





Modellierung durch einen Graphen: Zwei Verkehrs-ströme werden durch eine Line verbunden, wenn sie sich gegenseitig nicht stören (mit Abbiegerregel)

Mögliche Ampelschaltungen:

Phase 1:
1, 2, 4, 8, 9

Phase 2:
2, 5, 7

Phase 3:
3, 6, 9

Phase 1:
1, 2, 4, 8, 9

Phase 2:
3, 4, 7

Phase 3:
5, 6, 7

Öffnung von Sachaufgaben
(Forderung seit Kühnel 1916):

- **Bedeutsame** Sachsituation identifizieren
- Fragen finden
- Daten sammeln, Daten schätzen lassen
- Lösungswege freigeben, Überschlagslösungen zulassen
- Ergebnisse für die Situation bewerten

Nachfolgend ein aktuelles Musterbeispiel für die Öffnung des Sachrechnens: Bordcomputer

Bordcomputer

Eine Modellierungsaufgabe aus der Praxis

Stephan Kern

Modellierungsaufgabe

Bordcomputer

Herr Kern hat sein Auto im Oktober 2012 gekauft.

Seitdem ist er mit dem Auto 31 475 km gefahren. Das Auto hat durchschnittlich fast 9 Liter Benzin auf 100 km verbraucht.

Kooperatives Lernen

Unterrichtsverlauf

(I) Aufgabe lesen (EA)

(II) Verständnisfragen klären und Fragestellungen finden (PA)

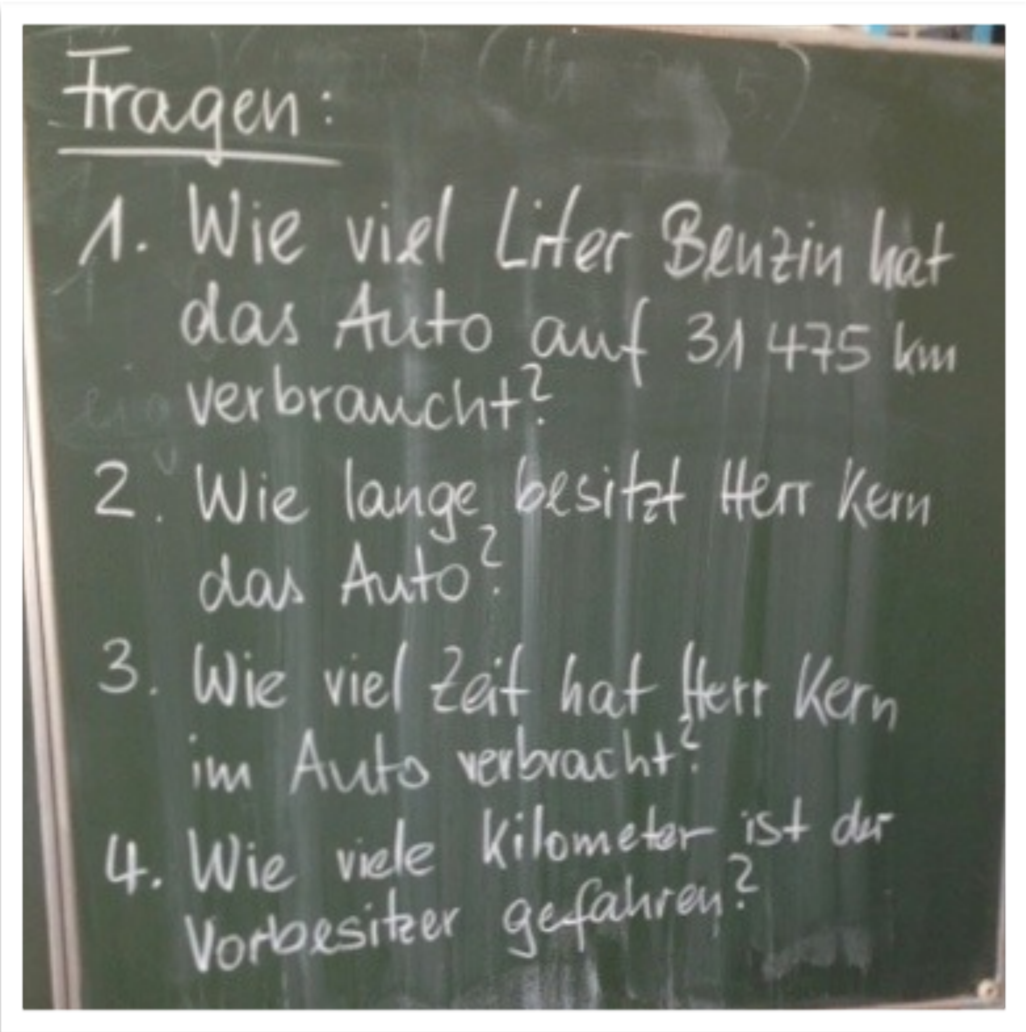
(III) Fragestellungen sammeln (Plenum)

(IV) Fragestellung auswählen und bearbeiten (EA)

(V) Ergebnisse vergleichen und ggf. überarbeiten (GA)

(VI) Arbeitsergebnisse vorstellen und diskutieren (Plenum)

Gesammelte Fragestellungen



Gefahrene Kilometer berechnen

Frage 4: wie viel ~~K~~ Kilometer ist der vorbesitzer gefahren

Luke

88 - 31 = 57

942 - 475 = 467

900 - 400 = 500

40 - 70 = 30 -

88942 - 31475 = 57467

Zeitspannen berechnen

Frage 2:

wie lange hat ~~Herr~~ Kern das Auto?

Rechnung: Von 4.10.2012 +1 Jahr = 4.10.2013 + 7 Monate = 4.05.2014 +16 Tage = 10.05.2014

Antwort: er hat das auto 1 Jahre 7 Monate und 16 Tage.

Benzinverbrauch berechnen (I)

1. Wie viel Liter Benzin hat das Auto auf 31 475 Km verbraucht?

R: 31 475 : 100 = 314 – 315   314 · 9 = 2826

A: Der Wagen hat 2826 l ~~2826 l~~ ~~verbraucht~~ verbraucht

L: Paula, was bedeutet das Ergebnis 314 minus 315?

P: Das ist kein Minus. 31 475 können wir noch nicht durch 100 teilen. Das Ergebnis muss aber zwischen 314 und 315 liegen.

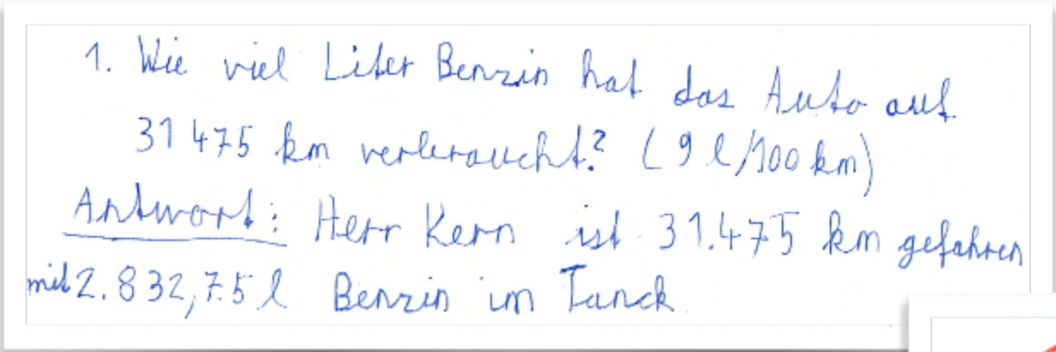
L: Weshalb?

P: 314 mal 100 ist 31 400 und 315 mal 100 ist 31 500.

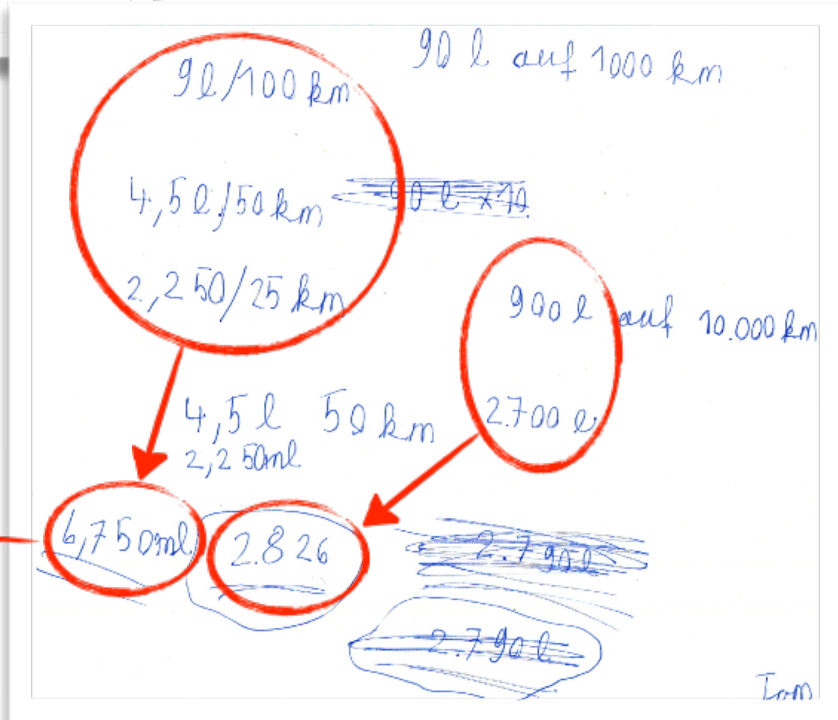
L: Weshalb hast du dann mit 314 weiter gerechnet?

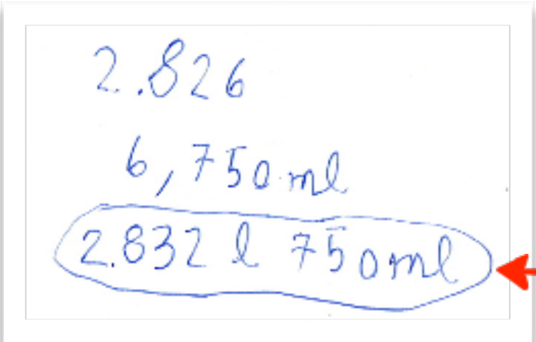
P: Weil mindestens 314 rauskommt. *(Paula überlegt.)* Nein, 475 ist fast 500. Ich hätte mit 315 malnehmen müssen.

Benzinverbrauch berechnen (II)

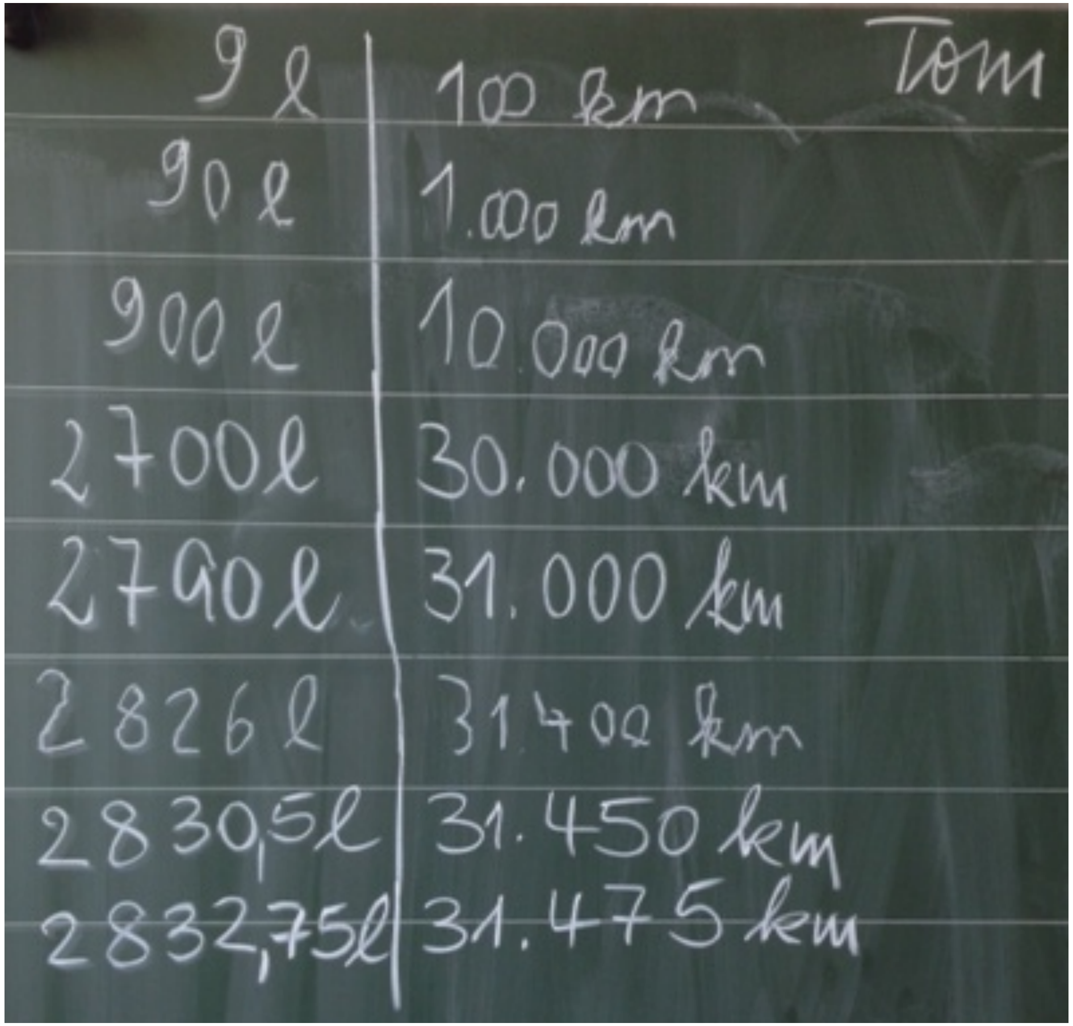

1. Wie viel Liter Benzin hat das Auto auf 31 475 km verbraucht? (9 l/100 km)

Antwort: Herr Kern ist 31.475 km gefahren mit 2.832,75 l Benzin im Tanck





Benzinverbrauch berechnen (III)



Weitere Beispiele für real bedeutsame offene Aufgaben:

- Was kostet eine dreitägige Klassenfahrt mit Aufenthalt in einer Jugendherberge?

- Wie lange dauert eine Reise von ... nach ... mit dem Auto, mit dem Flugzeug, mit der Bahn?

- Der europäische Fernwanderweg E 1 verläuft in Deutschland von Flensburg zum Bodensee. Wie viele Tage dauert es, ihn zu durchwandern?

- Wie viel kostet der Strom, den unsere Schule in einem Jahr verbraucht (Oberhauser 1929)?

Stau-Aufgabe

Aus: Müller/Wittmann 1977, S. 141

5*. In der Urlaubszeit berichtet der Verkehrsfunk über einen Autobahnstau von 20 km Länge. Die Autobahn ist an dieser Stelle schon dreispurig ausgebaut, und an diesem Ferienwochenende sind nur Pkw.s unterwegs. Schätzen Sie ab:

a) Wie viele Pkws stehen in dem Verkehrsstau?

b) Wie viele Personen sind davon betroffen?

Das Schulprogramm ALEF behandelt die Aufgabe a), indem es den Schülern die Durchschnittslänge für einen Pkw mit 5 m und den Durchschnittsabstand mit 1 m angibt. Was sagen Sie dazu? Wo und wie könnten Sie mit Ihren Schülern eine notwendige Stichprobenerhebung durchführen? Entwerfen Sie eine Unterrichtsskizze.

Unterrichtsstunde über folgende offene Sachaufgabe aus dem Jahr 1969 (!):

- Familie Wittmann möchte in den Urlaub fahren.
  Zur Verfügung stehen 1500 DM. Reicht das Geld?

Ähnlich wie beim Beispiel “Bordcomputer“ haben die Kinder einer 4. Klasse der Dortmunder Kreuzschule damals die relevanten Fragen gestellt. Der Lehrer (E.Ch.Wittmann) lieferte die geforderten Daten, die dann von den Kindern bei ihren Rechnungen verwendet wurden.

Anmerkung am Rande: Die Dokumente aus den Jahren 1969, 1977 und 1977/78 belegen, dass sich die Gründer der Projekte mathe 2000 und Mathe 2000+ bereits vor 40 Jahren intensiv mit dem Thema „Modellieren“ (in damaliger Terminologie „Modell bilden“ und „Mathematisieren“) beschäftigt haben.

Abschließende Bewertung offener Sachaufgaben und „Fermi“-Aufgaben:

Entscheidende Frage:
Was ist fachlich wichtig und in der Praxis **im Rahmen der verfügbaren Zeit** machbar?

Priorität auf

– Gesamtkonzept (Fachstruktur!)
– Sinnvolle Anwendung erarbeiteter Standardmodelle
– Modellieren einer beschränkten Zahl fachlich und sachlich bedeutsamer Sachsituationen

Sachrechnen im Zahlenbuch:

Ziele:

Vermehrung **bedeutsamen** Sachwissens

Einführung der Kinder in **Standardmodelle** (z.B. Mathematik des Einkaufens, Dreisatz,...)

Vermittlung sicherer **Basiskompetenzen**

Erarbeitung grundlegender Lösungsstrategien

Öffnung der Sachaufgaben im Buch unter Anpassung an die lokalen Gegebenheiten

Beispiele :

Seitenansichten

Grundschule Rosenstraße

Mathematik im Supermarkt

Bestimmung von Entfernungen

Summa summarum:

Die allermeisten „Fermi-Aufgaben“ (nicht alle!) sind künstlich. Die Kinder werden in ihrem Beruf und in der Lebenswelt solchen Aufgaben nie begegnen. Diese Aufgaben vermitteln ein falsches Bild von der Mathematik und ihren Anwendungen in der Realität und verdienen daher in der Mathematikdidaktik keinen Platz.

Offene Aufgaben bei **real bedeutsamen** Sachsituationen, um die sie sich die Didaktiker seit 100 Jahren bemühen, sind der richtige Weg zur Weiterentwicklung des Sachrechnens.

Vorbild:

Heinrich Winter, Sachrechnen in der Grundschule. Cornelsen Scriptor 1987

In diesem Buch kommen künstliche „Fermi“-Aufgaben nicht vor!

Kommentar von Gerhard Müller (in absentia):

Beim Sachrechnen kann man die Kinder (und Lehrer!) mit schönen Beispielen (Sachtexten, offenen Aufgaben und leider auch mit „Fermi“-Aufgaben, den „bunten Hunden“ des Sachrechnens) immer motivieren. Dies ist aber **nicht** das Problem. Auf die gute **Mischung** kommt es an. Darum bemühen wir uns im Zahlenbuch: Die Größen werden sehr sorgfältig eingeführt (Beispiel: Meter und Kilometer,....).
Die Struktur der Größen (Zehnerstruktur und 60er-Struktur bei der Zeit) wird gut herausgearbeitet. Einfache und komplexere Modellierungen sind genügend vorhanden (Einkauf, günstiger Fahrpreis, Wachstum von Tannen, Planung einer Klassenfahrt, ...)
Modellierungsmöglichkeiten und Lösungsansätze (Tabellen , Zeichnungen, Probieren als Ansatz,...) werden immer wieder aufgezeigt.

Auch Sachtexte kommen vor (Fledermaus, DIN-Format, Elefanten,....).
Der Dreisatz(Zweisatz), die Proportionalität als immer wiederkehrende Struktur der Sekundarstufe I wird **gründlich** vorbereitet.
Häufige und für Kinder wichtige Situationen werden "blitzartig" geübt, um das Sachrechnen zu entlasten:
Beispiel: Preis, Gegeben , Zurück.
Einseitigkeiten (wie künstliche “Fermi“-Aufgaben) führen nicht weiter. Was hilft es den Kindern, wenn sie ein Klassenzimmer mit Luftballons ausfüllen? Das Ausmessen mit Meterquadraten hingegen brauchen sie in der Berufsausbildung, im Studium und in der Lebenswelt.
Die klassische Textaufgabe wird im Zahlenbuch nicht verteufelt, sondern hat im Kurs ihren festen Platz.

Im Zahlenbuch haben wir versucht, zum Sachrechnen einen vernünftigen Kurs zusammenzustellen, auch im Hinblick auf die knappe Unterrichtszeit.
Man kann leicht einzelne Punkte kritisieren (z.B. schmucklose Texte oder die geringere Motivation) und verbessern, was aber immer Zeit kostet.

Beim Sachrechnen kommt es nicht auf kurzlebige Events, sondern auf den langen Atem an. Man muss die Dinge entwickeln, die für den Unterricht in den weiterführenden Schulen eine sichere Grundlage bilden.
Da sind wir mit dem Zahlenbuch doch recht gut aufgestellt.