

Ergänzung zum „Handbuch produktiver Rechenübungen“: Zusammenfassung von Band 1 als Startrampe für Band 2

Jede Erkenntnis beruht auf früheren Erkenntnissen und ist
die Grundlage für Erkenntnisse auf einer höheren Stufe.

Jean Piaget

Vor der Behandlung des Tausender- und Millionraums im Band 2 erscheint eine kurze Darstellung der Grundzüge von Band 1 sinnvoll, weil dadurch die durchgehenden Linien des Konzepts deutlicher werden.

1. Allgemeine Aspekte

Wir nutzen in diesem Handbuch mathematische Strukturen als *Lernhilfen*. Dabei orientieren uns dabei an den bedeutungshaltigen elementaren Fassungen dieser Strukturen und beschränken uns auf einfache Darstellungsmittel und Sprechweisen.¹

Die Lehrerbildung sehen wir in Analogie zur Bergführerausbildung. Genau wie Bergführerinnen und Bergführer die Berglandschaft kennen müssen, um ihre Klienten angepasst an deren Möglichkeiten professionell führen zu können, müssen auch Lehrerinnen und Lehrer das mathematische Gelände kennen, um Kinder angepasst an deren Lernvoraussetzungen professionell unterrichten zu können.

Wir bieten unsere Unterrichtsvorschläge daher als Beschreibung von „Lernumgebungen“ an, die man mit Beschreibungen von Bergtouren in einem Wanderführer vergleichen kann.²

Zur Gliederung dienen uns folgende Fragen:

Worum geht es? Was soll geübt werden?

Was wird benötigt?

Wie kann man vorgehen?

Wie kann es weitergehen?

Wie im Vorwort zu Band 1 erwähnt verstehen wir das Handbuch als Referenztext zur Planung, Durchführung und Besprechung von Unterrichtsversuchen in beiden Ausbildungsphasen, in der Praxis und in der berufsbegleitenden Weiterbildung.

Für die Unterrichtsplanung beziehen wir uns auf die Theorie der „didaktischen Situationen“ von Guy Brousseau und schlagen das Schema in Abb. 1 vor, in dem „Situation“ durch „Phase“ ersetzt ist. Für eine ausführliche Diskussion sei auf Band 1, Abschnitt E 2, S. 20 ff. verwiesen.

¹ Die zu frühe und einseitige Nutzung formaler Darstellungen als angeblich „wissenschaftlich“ einzig zulässige Fassung von Mathematik halten wir für die Hauptursache der Lernschwierigkeiten in diesem Fach bis hin zur Lehrerbildung.

² Am Rand sei erwähnt, dass wir im Design, der empirischen Erforschung und der Implementation von Lernumgebungen die zentrale Aufgabe einer praxisorientierten Mathematikdidaktik sehen.

	Einführung	Bearbeitung	Bericht	Begründung/ Reflexion	Zusammen- fassung
Lehrperson	<i>Arbeitsauftrag gut erklären, Lernziele deutlich benennen, ggf. schriftliches Aufgabenmaterial zur Verfügung stellen</i>	<i>Kinder beobachten, Anregungen geben, ggf. nachfragen Evtl. Aufgabenfolge mündlich stellen,</i>	<i>zuhören, nachfragen</i>	<i>Begründungen anregen, Einsichten vertiefen</i>	<i>Das Gelernte auf den Punkt bringen</i>
Kinder	<i>zuschauen, zuhören, nachfragen, „sich einklinken“</i>	<i>Aufgaben bearbeiten, sich untereinander austauschen</i>	<i>Lösungen oder gefundene Muster vorstellen</i>	<i>Anregungen aufgreifen, Muster erklären, Lösungen begründen</i>	<i>zuhören, nachfragen</i>

Abb. 1

Das Schema ist sowohl für die Vorbereitung als auch die Beurteilung von Unterricht wichtig. Es zeigt die Aspekte an, auf die es jeweils ankommt.

Aufgabe der Lehrperson ist es dabei insbesondere, einen fachlichen Rahmen zu setzen, Lernprozesse anzuregen, Feedback zu geben und das jeweils Gelernte am Schluss prägnant zusammenzufassen. An die Stelle des „Ich-du-wir“-Prinzips setzen wir aus guten Gründen das „Wir-ich-du-wir“-Prinzip (Näheres dazu im Abschnitt E 1 von Band 1, S. 17 – 18).

Die didaktische Theorie kann grundsätzlich nicht alle Probleme lösen, die sich in der Praxis stellen. Nur die Lehrerinnen und Lehrer vor Ort können Entscheidungen treffen, die sie in der gegebenen Situation aufgrund ihrer Kenntnis der lokalen Verhältnisse für richtig halten. Das Handbuch regt daher bewusst zu „kollektiven Unterrichtsexperimenten“ an.

(Genauerer dazu in Band 1, Abschnitt E 3, S. 22 – 23.)

2. Übersicht über die Grundideen der Arithmetik

Die didaktische Konzeption dieses Handbuchs beruht auf einem Verständnis von Lernen, das Jean Piaget in seiner „genetischen Epistemologie“³ formuliert hat: Neues Wissen wird nicht einfach an vorhandenes Wissen angelagert, so wie z.B. beim Bau einer Maschine Teil für Teil angefügt wird. Das vorhandene Wissen erweitert sich vielmehr in *organischer Weise*. Es wächst, so wie Lebewesen wachsen.

Dreh- und Angelpunkt dieser genetischen Sichtweise für die Arithmetik sind die folgenden sieben Grundideen, die mit dem Vorrücken zu immer größeren Zahlräumen fortlaufend ausdifferenziert, schärfer gefasst und miteinander verzahnt werden:

1. Ordinaler und kardinaler Zahlaspekt

Der Zahlbegriff ist eine Synthese verschiedener Aspekte. Zwei Aspekte sind dabei führend: der *ordinale* Zahlaspekt, verkörpert in der Zahlenreihe, und der *kardinale* Zahlaspekt, verkörpert in Anzahlen von Plättchen und anderen zählbaren Objekten.

³ Piaget, J., Psychologie der Intelligenz. Stuttgart: Klett-Cotta 2010¹⁰. Die Epistemologie (dt. Erkenntnistheorie) befasst sich mit der Frage, wie Wissen zustande kommt und sich entwickelt.

Die Zahlenreihe wird im Verlauf der Schuljahre Schritt für Schritt erweitert. Gleichzeitig werden immer größere Anzahlen betrachtet.

Die Arbeitsmittel wachsen mit: von Würfelbildern und dem Zehnerfeld in der Frühförderung zum Zwanzigerfeld, dem Hunderterfeld und der Hundertertafel, und weiter zum Tausenderbuch und zum Millionbuch.

2. Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile

Mit den natürlichen Zahlen kann man nach bestimmten Rechengesetzen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren und dabei Rechenvorteile nutzen. Die Anwendung der Gesetze ist grundsätzlich frei, was verschiedene Rechenwege eröffnet.

3. Zehnersystem

Durch die dekadische Gliederung des Zahlenraums wird die Übersicht über die Zahlenreihe und über Anzahlen entscheidend gesteigert. Das Zehnersystem erlaubt es, das Rechnen mit kleinen Zahlen unmittelbar für das Rechnen mit großen Zahlen zu nutzen.

4. Rechenverfahren

Die Rechenoperationen können aber auch mit festgelegten Verfahren (Algorithmen) durchgeführt werden, die sich mechanisieren lassen und heute in Taschenrechnern und Computern implementiert sind.

Erst im Tausender- und Millionraum spielt diese Grundidee eine Rolle.

5. Arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster

Eigenschaften und Beziehungen zwischen den natürlichen Zahlen bilden die Grundlage für die Erforschung, Beschreibung und Begründung von Mustern und Strukturen, die im Laufe der Zeit immer komplexer werden.

6. Zahlen in der Umwelt

Zahlen lassen sich als Anzahlen, Ordnungszahlen, Maßzahlen, Operatoren und Codes vielfältig verwenden. Auch hier erweitert sich die Perspektive fortlaufend.

7. Übersetzung in die Zahlsprache

Viele Sachsituationen lassen sich rechnerisch erfassen und lösen. Aus der mathematischen Lösung können praktische Folgerungen gezogen werden.

Auch bei dieser Grundidee nimmt die Komplexität im Laufe der Zeit zu.

Gemäß Grundidee 5 lernen die Kinder die Arithmetik als einen Inhaltsbereich kennen, in dem Zahlen und Rechnungen nicht beziehungslos neben einander stehen, sondern wohlgeordnete, „schöne“ Muster bilden, die man erforschen, beschreiben und begründen kann.

Die Samen für einige der Grundideen von Abschnitt 1 können bereits vor der Schule gelegt werden. Dies betrifft insbesondere die erste Grundidee: Die Kinder können den Anfang der Zahlenreihe lernen und mit der strukturierten Anzahlerfassung (dem „rechnenden“ Zählen) vertraut gemacht werden. Es ist kein Zufall, dass diese beiden Kompetenzen auch die ersten beiden Basiskompetenzen im Blitzrechnenkurs sind.

3. Die Rechengesetze der Arithmetik und ihre operative Begründung

Dem Rechnen mit natürlichen Zahlen (und später dem Rechnen mit ganzen Zahlen, Bruchzahlen und reellen Zahlen) liegen nur fünf Rechengesetze zugrunde, die wir hier kurz umreißen.

- *Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz) der Addition,*
in formaler Fassung: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- *Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz) der Addition,*
in formaler Fassung: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Diese beiden Gesetze sagen aus, dass man Summanden in einer Summe *additiv* zerlegen und vertauschen sowie das Ergebnis schrittweise berechnen darf.

Beispiel:

$$34 + 19 = 33 + 1 + 19 = 33 + 20 = 53.$$

Aus dem Verbindungsgesetz folgt, dass man auch eine Differenz schrittweise bestimmen kann.

Beispiel:

$$15 - 7 \text{ kann berechnet werden über } 15 - 5 = 10 \text{ und } 10 - 2 = 8, \text{ denn } 8 + 7 = (8 + 2) + 5 = 10 + 5 = 15.$$

- *Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz) der Multiplikation*
in formaler Fassung: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- *Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz) der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot$*
in formaler Fassung: $a \cdot b = b \cdot a$

Diese Gesetze beinhalten, dass man in einem Produkt die Faktoren multiplikativ zerlegen und vertauschen sowie das Ergebnis schrittweise berechnen darf.

Beispiel:

$$4 \cdot 125 = 4 \cdot 25 \cdot 5 = 100 \cdot 5 = 500.$$

Aus dem Verbindungsgesetz der Multiplikation folgt, dass man auch das Ergebnis einer Division schrittweise berechnen kann.

Beispiel:

$$204 : 6 = (204 : 2) : 3 = 102 : 3 = 34, \text{ denn } 34 \cdot 6 = 34 \cdot (3 \cdot 2) = (34 \cdot 3) \cdot 2$$

Wie ersichtlich sind die Gesetze für die Addition und für die Multiplikation strukturell analog, wie in der Bezeichnung um Ausdruck kommt.

- *Verteilungsgesetz (Distributivgesetz):*
Einfache formale Fassungen: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ und $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Ausführliche Fassung: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$

Dieses Gesetz, das die Addition und die Multiplikation miteinander verknüpft, erlaubt es ebenfalls, Produkte schrittweise zu berechnen.

Beispiel:

$$4 \cdot 36 = 4 \cdot 30 + 4 \cdot 6 = 120 + 24 = 144$$

Auch dieses Gesetz kann auf die Division übertragen werden.

Beispiel:

Aus $(30 + 4) \cdot 6 = 30 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 180 + 24 = 204$ folgt
 $204 : 6 = 180 : 6 + 24 : 6 = 30 + 4$.

Die fünf Rechengesetze sind ein *starkes Stück Mathematik*. Dies geht z.B. daraus hervor, dass sie der englischen Mathematiker Timothy Gowers (Fields-Medaille 1998) benutzt hat, um in einem Mini-Bändchen zu beschreiben, was Mathematik ist.⁴

Die formalen Fassungen der Rechengesetze können natürlich erst später in der Algebra zum Tragen kommen. Das heißt aber nicht, dass die Gesetze in der Grundschule keinen Platz hätten. Ganz im Gegenteil: Die Gesetze lassen sich sehr gut mit den Mitteln begründen und nutzen, die in der Grundschule zur Verfügung stehen: Man muss die Zahlen nur durch Plättchenmengen und Punktfelder repräsentieren und dabei ausnutzen, dass sich bei deren Verlagerung bzw. Umordnung die Anzahl der Plättchen bzw. der Punkte nicht ändert (Invarianzprinzip, s. Z 1.1.2).

Punktfelder bringen die Definition der Multiplikation als verkürzte Addition optimal zur Geltung, da in jeder Zeile gleich viele Punkte liegen.

Für operative Beweis der Rechengesetze sei auf die Abschnitte Z 2.1.1 und H 4.1.1 verwiesen. Das Wesen dieser Beweise besteht darin, dass die Gültigkeit der betreffenden Muster und Strukturen nicht aus der Betrachtung einzelner Beispiele, sondern aus den Wirkungen von *Operationen* hervorgeht, die man auf beliebige Beispiele anwenden kann. Die Drehung eines Punktfelds um 90° , die an einzelnen Beispielen vollzogen wird, kann ja *an jedem Punktfeld* vorgenommen werden und bewirkt *immer* eine Vertauschung von Zeilen und Spalten. Bei Verlagerung von Punkten *beliebiger* Punktmengen und der Umordnung *beliebiger* Felder bleiben die Anzahlen aller Plättchen bzw. Punkte *immer* gleich. Operative Beweise sind daher allgemeingültig, auch wenn die Operationen nur an einzelnen Beispielen beschrieben werden.

Der große Vorteil dieses operativen Zugangs besteht darin, dass die Grundidee „Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile“ bereits ganz früh in einer für die Kinder verständlichen Weise eingeführt werden kann. *Damit wird Heinrich Winters Forderung nach „algebraischer Durchdringung der Arithmetik“ eingelöst.*

Die Begründung der Rechengesetze der *Addition* ist auf Grundschulniveau zwar auch mit linearen Zahldarstellungen (ordinaler Aspekt) möglich. Bei der Multiplikation ist das aber nicht mehr der Fall. Hier benötigt man notwendig zweidimensionale Punktfelder.⁵ Dem ordinalen Zahlaspekt eine exklusive Rolle für die „Repräsentation von Wissen über Zahlen“ zuzuweisen, wie das J.H. Lorenz⁶ apodiktisch fordert, steht im Widerspruch zu den Strukturen des Faches, die nicht zur Disposition stehen.

⁴ Gowers, T., Mathematics. A very short introduction. New York: Oxford University Press 2002. (Deutsche Übersetzung: Mathematik. Stuttgart: Reclam 2011, s. 41 - 43). Gowers fügt nur noch zwei Gesetze über die Zahlen 0 und 1 als neutrale Elemente bei der Addition bzw. Multiplikation bei, die im Rahmen der Grundschule selbstverständlich sind.

⁵ Freudenthal, H., Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel 1983, p. 109

⁶ Lorenz, J.H., Einige Anmerkungen zur Repräsentation von Wissen über Zahlen. Journal für Mathematik-Didaktik (2017) 38: 125 - 129

4. Addition und Subtraktion

Die Zahlenräume, die in den Kapiteln der beiden Bände des Handbuchs, betrachtet werden, sind nach oben offen. Im Mittelpunkt stehen aber nichtsdestoweniger immer Themen, die auf diese Zahlenräume begrenzt sind.

4.1 Addition und Subtraktion im Zwanzigerraum

Dass der Zwanzigerraum eine besondere Rolle spielt, liegt daran, dass das Einspluseins und seine Umkehrung, das Einsminuseins, diesen Zahlenraum gerade ausschöpfen. Das größte Ergebnis des Einspluseins ist ja 20 ($= 10 + 10$).

Bei der Erarbeitung dieser beiden Themen ist das Zwanzigerfeld (Abb. 1) das Arbeitsmittel der Wahl, da man an ihm mithilfe von Plättchen Summen und Differenzen darstellen und zur Berechnung der Ergebnisse die Rechengesetze in ihrer operativen Form nutzen kann. Durch Hinzulegen, Wegnehmen, Verschieben und Wenden von Plättchen kann man schwierigere Aufgaben auf einfache zurückführen. Die Fünfer- und Zehnerstruktur des Zwanzigerfeldes gilt es dabei bewusst zu nutzen, um dem zählenden Vorgehen entgegen zu wirken.



Abb. 1

Einfache Aufgaben bei der Addition:

- Addition von Zahlen im Fünferraum
- Addition von 1 und von 10
- Ergänzen bis 10
- Addition von 5
- Verdopplungsaufgaben

Einfache Aufgaben bei der Subtraktion:

- Subtraktion von Zahlen im Fünferraum
- Subtraktion von 1 und von 10
- Umkehrungen von Zehnerergänzungen
- Subtraktion von 5
- Umkehrungen von Verdopplungsaufgaben

Schwierigere Aufgaben lassen sich mithilfe der Rechengesetze auf einfache zurückführen.

Beispiele:

Aus $7 + 7 = 14$ folgen z.B.

$8 + 7 = 15$ (ein Plättchen zur ersten 7 dazu)

$7 + 6 = 13$ (ein Plättchen von der zweiten 7 weg).

Aus $5 + 5 = 10$ folgen

$5 + 4 = 9$ (ein Plättchen von der zweiten 5 weg)

$5 + 6 = 11$ (ein Plättchen zur zweiten 5 dazu).

Aus $15 - 5 = 10$, folgt $15 - 6 = 9$ (ein Plättchen mehr entfernen).

Aus $14 - 7 = 7$ folgt $14 - 6 = 8$ (ein Plättchen weniger entfernen).

4.2 Addition und Subtraktion im Hunderterraum

Das Legen von Plättchen am Zwanzigerfeld findet im Hunderterraum seine Fortsetzung im Legen von Zahlen mit Zehnerstreifen und Plättchen und dem Zeigen von Zahlen am Hunderterfeld mit dem Zahlenwinkel. Dazu tritt die bildliche Darstellung mit Zahlbildern (Abb. 3).

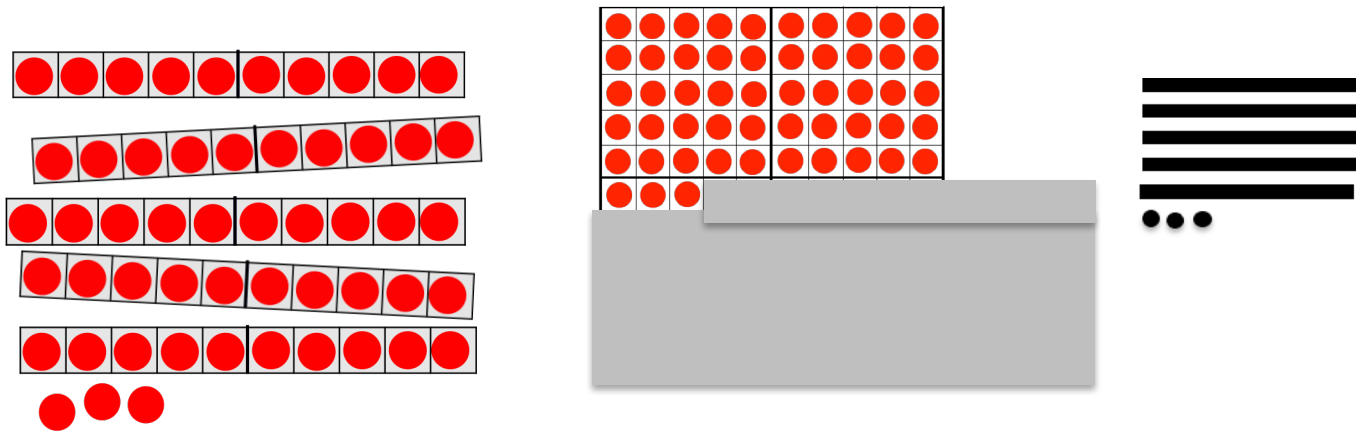


Abb. 3

An den Darstellungen wird deutlich, dass neben die Zahleneinheit „Einer“ die Einheit „Zehner“ tritt.

Das Zehnersystem erlaubt es, das Rechnen mit kleinen Zahlen auf das Rechnen mit großen Zahlen anzuwenden, was die alten Rechendidaktiker mit dem treffenden Satz „Mit Zehnern (Hundertern, Tausendern, ...) rechnen wie mit Einern“ auf den Punkt gebracht haben.

Bei der Addition und Subtraktion im Hunderterraum kommt dieses Prinzip bereits voll zum Tragen: Die Kinder machen sich klar, dass $40 + 30 = 70$ eigentlich dieselbe Aufgabe wie $4 + 3 = 7$ ist, denn in $4 + 3 = 7$ bleibt offen, was die Zahlen bedeuten. Sie können also auch Zehner bedeuten. $40 + 30$ ist nur eine andere Schreibweise für $4 \text{ Z} + 3 \text{ Z}$. Das Ergebnis ist 7 Z . Statt $4 \text{ Z} + 3 \text{ Z} = 7 \text{ Z}$ schreibt man $40 + 30 = 70$.

Aufgaben wie $58 + 26$ können mithilfe des Verbindungs- und Vertauschungsgesetzes in die Teilaufgaben $50 + 20$ und $8 + 6$ zerlegt werden. Die Aufgabe $50 + 20$ wird auf $5 + 2$ zurückgeführt.

Folgende Rechenwege werden im Hunderterraum als mathematisch sinnvolle Wege erarbeitet, wobei die Struktur des Zehnersystems und die Rechengesetze der Addition ineinandergreifen. Das Zehnersystem legt Zerlegungen nahe, die Rechengesetze legitimieren die entsprechende Umformungen.

Addition:

„Zehner plus Zehner, Einer plus Einer“

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 58 + 26 = 84 \\ \hline \end{array}$$

$$50 + 20 = 70$$

$$8 + 6 = 14$$

„Erst Zehner dazu, dann Einer dazu“

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 58 + 26 = 84 \\ \hline \end{array}$$

$$58 + 20 = 78$$

$$78 + 6 = 84$$

„Erst Einer dazu, dann Zehner dazu“

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 58 + 26 = 84 \\ \hline \end{array}$$

$$58 + 6 = 64$$

$$64 + 20 = 84$$

„Hilfsaufgabe“

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 58 + 26 = 84 \\ \hline \end{array}$$

$$60 + 24 = 84$$

Subtraktion:

„Zehner minus Zehner, Einer minus Einer“

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 74 - 28 = 46 \\ \hline \end{array}$$

$$70 - 20 = 50$$

$$4 - 8 = -4$$

50 - 4 = 46 wird
im Kopf
gerechnet.

„Erst Zehner weg, dann Einer weg“

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 74 - 28 = 46 \\ \hline \end{array}$$

$$74 - 20 = 54$$

$$54 - 8 = 46$$

„Erst Einer weg,
dann Zehner weg“

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 74 - 28 = 46 \\ \hline \end{array}$$

$$74 - 8 = 66$$

„Hilfsaufgabe“

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 74 - 28 = 46 \\ \hline \end{array}$$

$$74 - 30 = 44$$

44 + 2 = 46 wird
im Kopf gerechnet.

„Ergänzen“

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 74 - 28 = 46 \\ \hline \end{array}$$

$$28 + 2 = 30$$

$$30 + 44 = 74$$

Bei dem Rechenweg „Hilfsaufgabe“ werden Zahlen *vor dem Rechnen* verändert und es wird mitbedacht, welche Konsequenz das für das Ergebnis hat. Bei geschickter Anwendung dieses Rechenwegs lässt sich der Rechenaufwand oftmals stark reduzieren. Im Gegensatz zu den anderen Wegen ist dieser Weg aber nicht allgemein, sondern nur situationsbezogen anwendbar, was bei Begründungen von Mustern ein Nachteil ist, bei denen es auf einheitliche Überlegungen ankommt.

Die Rechnungen müssen zunächst durch Handeln mit Zehnerstreifen und Plättchen sowie mit Zahlbildern unterstützt werden, da diese wichtig für das Verständnis sind. Ideal geeignet ist das Modul „Zahlbilder“ der Software „Plättchen & Co. digital“, mit dem 10 Punkte in 1 Zehner gebündelt und 1 Zehner in 10 Punkte entbündelt werden können.

Bis auf die Rechenwege „Zehner plus Zehner, Einer plus Einer“ und „Zehner minus Zehner, Einer minus Einer“, die für die schriftliche Addition und das Abziehverfahren der Subtraktion wichtig sind, lassen sich alle Wege auch am Rechenstrich unterstützen. Das getrennte Operieren mit Zehnern und Einern ist an dieser Darstellung aber nicht möglich. Festzuhalten ist, dass zu den Standardrechenwegen der halbschriftlichen Subtraktion auch das Ergänzen gehört, das eine ideale Grundlage für das Ergänzungsverfahren der schriftlichen Subtraktion bildet.

5. Das Einmaleins und seine Umkehrung

Bei der Einführung der Multiplikation sind Punktfelder unverzichtbar, weil die Rechengesetze der Multiplikation, wie oben schon angemerkt, nur mit dieser Darstellung grundschulgemäß erfasst werden können. An Punktfeldern ist auch unmittelbar ersichtlich, dass die Multiplikation eine verkürzte Addition ist.

Das Mittel der Wahl zur Darstellung von Einmaleinsaufgaben ist das Hunderterfeld mit dem Malwinkel. Durch Verschieben des Winkels können alle Aufgaben von $1 \cdot 1$ bis $10 \cdot 10$ dargestellt und verändert werden (Abb. 4), wodurch Beziehungen aufscheinen.

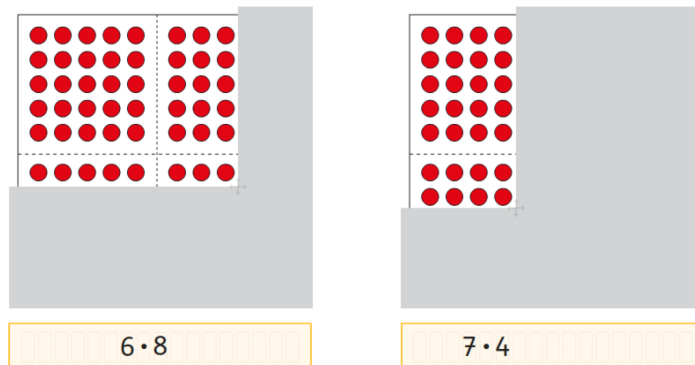


Abb. 4

Auch bei der Erarbeitung des Einmaleins geht man nach dem Prinzip „Vom Einfachen zum Schwierigen“ vor. Die einfachen Aufgaben, die sogenannten *Kernaufgaben*, sind die Aufgaben der Form „1mal ...“, „2mal ...“, „5mal ...“ und „10mal ...“. Aus ihnen lassen sich die anderen Aufgaben mithilfe des Verteilungsgesetzes herleiten (Abb. 5).

Kernaufgaben:

$$1 \cdot 7 = 7, 2 \cdot 7 = 14, 5 \cdot 7 = 35, 10 \cdot 7 = 70.$$

Abgeleitete Aufgaben:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 7 &= 14 + 7 = 21, \\ 4 \cdot 7 &= 14 + 14 = 28 \text{ und } 4 \cdot 7 = 35 - 7 = 28, \\ 6 \cdot 7 &= 35 + 7 = 42, \\ 7 \cdot 7 &= 35 + 14 = 49, \\ 8 \cdot 7 &= 70 - 14 = 56 \\ 9 \cdot 7 &= 70 - 7 = 63. \end{aligned}$$

Abb. 5

Wie ersichtlich werden bei allen Rechnungen nur die Ergebnisse **7**, **14**, **35** und **70** der Kernaufgaben verwendet.

Für diese Rechnungen werden die Addition und Subtraktion im Hunderterraum benötigt, die dem Einmaleins im fachlich aufbauenden Unterricht vorausgehen und gesichert sein müssen, bevor mit der Einführung des Einmaleins begonnen werden kann.

Analog zur Einspluseinstafel für die Addition ermöglicht die Einmaleinstafel (kurz Maltafel) eine zusammenfassende Betrachtung des *Einmaleins*. Auf der Maltafel sind die einfachen Kernaufgaben farbig gekennzeichnet (Abb. 6). Jede „weiße“ Aufgabe hat darin mindestens eine farbige Nachbaraufgabe, die sie stützt.

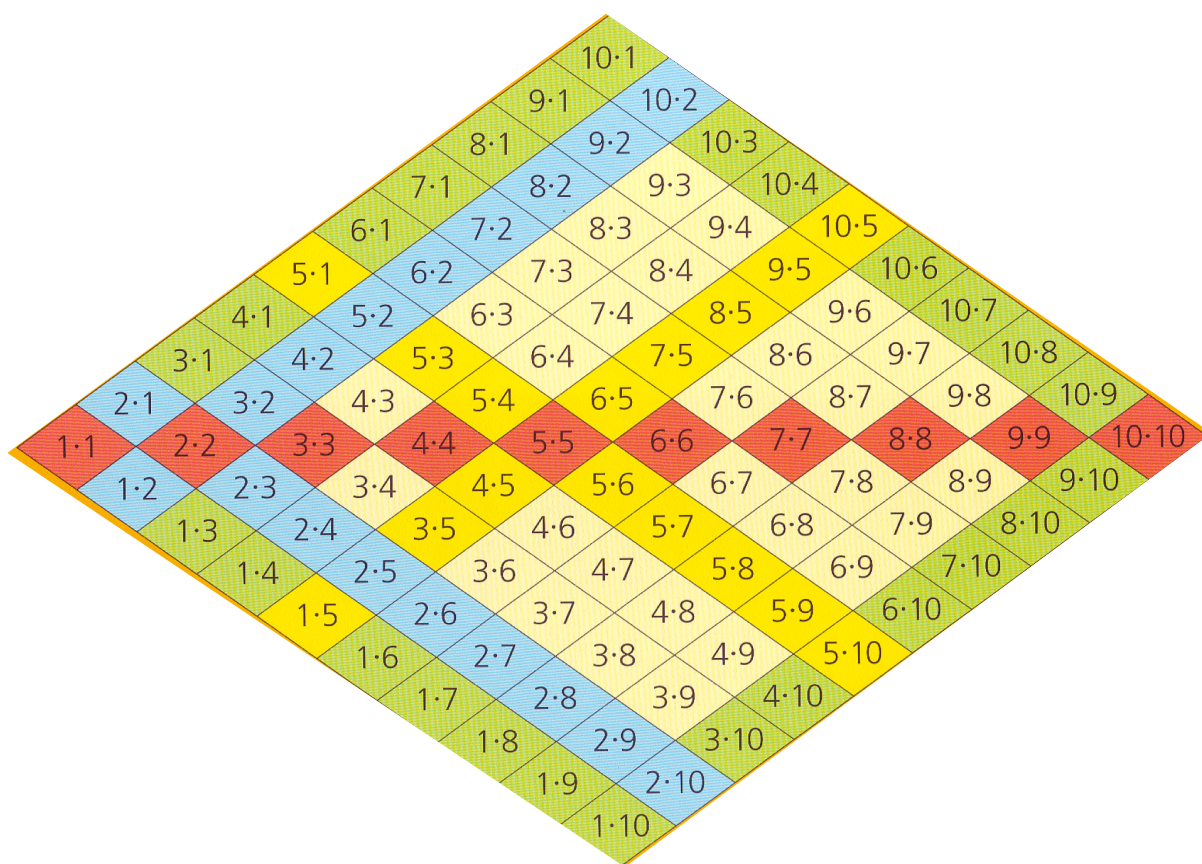
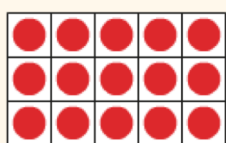


Abb. 6

Auch die Division hat als Umkehrung der Multiplikation zwei Aspekte: das *Aufteilen* und das *Verteilen*. An Punktfeldern sieht man schön, dass das Ergebnis einer Teilungsaufgabe nicht davon abhängt, ob der Divisor die Größe eines Teils oder die Anzahl der Teile angibt.

Beispiel: (Abb. 7)



In jeder Zeile stehen 5 Punkte, es sind drei Zeilen, also $3 \cdot 5 = 15$.
 In jeder Spalte stehen 3 Punkte, es sind fünf Spalten, also $5 \cdot 3 = 15$.
 15 aufgeteilt in drei Gruppen führt zu 5 in jeder Gruppe, also $15 : 3 = 5$.
 15 aufgeteilt in fünf Gruppen führt zu 3 in jeder Gruppe, also $15 : 5 = 3$.

Abb. 7

Die einfachen Divisionsaufgaben sind die Umkehrungen der einfachen Kernaufgaben des Einmaleins. Bei der Berechnung der Ergebnisse schwieriger Divisionsaufgaben kann man auf einfache Aufgaben zurückgreifen, indem man das Verteilungsgesetz anwendet.

Beispiel:

Bei der Aufgabe $48 : 8$ kann 48 in $40 + 8$ zerlegt werden.
 $40 : 8 = 5$, $8 : 8 = 1$. Also $48 : 8 = 5 + 1 = 6$.

Ergebnisse von Teilungsaufgaben kann man aber auch direkt aus Malaufgaben ableiten, da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist.

Beispiel:

Es gilt $15 : 3 = 5$ und $15 : 5 = 3$, denn $3 \cdot 5$ und $5 \cdot 3 = 15$.

In der Lernumgebung „Immer vier Aufgaben“ (H 7.2.3) wird diese Beziehung ausführlich thematisiert.

Genauso wie die Beherrschung des Einspluseins das Erlernen des Einsminuseins erleichtert, erleichtert die Beherrschung des Einmaleins das Erlernen seiner Umkehrung.

Die Kenntnis der Ergebnisse der Einmaleinsaufgaben, der sog. Einmaleinszahlen, ist nötig, um Teilaufgaben mit Rest lösen zu können.

Beispiel:

Für die Aufgabe $51 : 8$ muss man wissen, zwischen welchen Einmaleinszahlen der Achterreihe die Zahl 51 liegt. Es sind dies die Zahlen $48 = 6 \cdot 8$ und $56 = 7 \cdot 8$. Es gilt dann $51 : 8 = 6 \text{ R}3$. Die Kinder erhalten eine gute Vorstellung von diesem Rechenweg, wenn er an Punktfeldern aufgezeigt wird. Das Hunderterfeld zusammen mit dem Zahlen- und dem Malwinkel ist hier eine große Hilfe.

Beispiel:

Am Hunderterfeld werden Zahlen mit dem Mal- und gleichzeitig dem Zahlenwinkel wie folgt gelegt:

Mit dem Malwinkel wird zuerst das Punktfeld $10 \cdot 8$ gelegt. In dieser Position bleibt der Malwinkel liegen. Dann wird der Zahlenwinkel von oben beginnend zuerst Punkt für Punkt nach rechts gezogen und dabei das Punktfeld $10 \cdot 8$ von 1 beginnend durchlaufen. Man sieht zuerst 1, dann 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7 Punkte.

Dazu gehören die Divisionsaufgaben $1 : 8 = 0 \text{ R}1$, $2 : 8 = 1 \text{ R}2$, ..., $6 : 8 = 0 \text{ R}6$, $7 : 8 = 0 \text{ R}7$

Mit 8 wird eine Reihe voll: $8 = 1 \cdot 8$ und $8 : 8 = 1$.

Dann wird mit der Zahl 9 ein neuer Achter eröffnet. Der Zahlenwinkel rückt schrittweise nach rechts und gibt die Zahlen 10, ..., 15 frei, die bei der Division durch 8 den Ganztteil 1 und wachsende Reste bis 7 ergeben. Mit 16 wird ein zweiter Achter gefüllt: $16 = 2 \cdot 8$ und $16 : 8 = 2$.

Auf diese Weise wird ein Achter nach dem anderen schrittweise gefüllt.

Nach $48 : 8 = 6$ z.B. folgen $49 : 8 = 6 \text{ R}1$, $50 : 8 = 6 \text{ R}2$, $51 : 8 = 6 \text{ R}3$, usw.

6. Der Blitzrechnkurs

Diesem Handbuch liegt ein differenziertes Konzept von Üben zugrunde, wie bereits aus den Inhaltsverzeichnissen der beiden Bände hervorgeht: Wir unterscheiden drei Typen von Übungen:

- *grundlegende Übungen* im Zusammenhang mit der Einführung eines neuen Themas
- *produktive Übungen* zur Übung inhaltlicher Lernziele in Verbindung mit allgemeinen Lernzielen (Kompetenzen)
- *Übungen zur Automatisierung*.

Die Verbindung zwischen grundlegenden und automatisierenden Übungen wird durch den Blitzrechnkurs hergestellt. Dieser Kurs dient zur Übung von Basiskompetenzen. Wie Tab. 1 zeigt, zielen diese Übungen einerseits auf den Aufbau von Zahlvorstellungen, andererseits auf die sichere und flüssige Beherrschung von rechnerischen Grundfertigkeiten.⁷

Bei jeder Übung wird entsprechend zwischen der Grundlegungs- und der Automatisierungsphase unterschieden (s. Z 4.1.2).

⁷ In der Spalte Millionraum wurden die erste und fünfte Übung gegenüber der Tabelle in Z 4.1.1 verändert. Dies wird in Abschnitt M 4.2 genauer erläutert.

Seiner Natur nach ist der Blitzrechnenkurs gleichzeitig zur Diagnose und zum Fördern geeignet (s. den Artikel „Warum rechenschwache Kinder vom „systemischen Ansatz“ des Handbuchs besonders profitieren?“ im Anhang von Band 1).

Rechnen bis 20	Rechnen bis 100	Rechnen bis 1 000	Rechnen bis 1 000 000
Wie viele?	Wie viele? Welche Zahl	Einmaleins auch umgekehrt	Zahlen legen, lesen und schreiben
Zahlenreihe	Zählen in Schritten	Verdoppeln/Halbieren im Hunderter	Ergänzen bis 1 Million
Kraft der Fünf	Ergänzen zum Zehner	Wie viele? Welche Zahl?	Stufenzahlen teilen
Zerlegen	Ergänzen bis 100	Zählen in Schritten	Subtraktion von Stufenzahlen
Ergänzen bis 10/20	100 teilen	Ergänzen bis 1 000	Zahlen anders lesen
Verdoppeln	Verdoppeln/Halbieren	1 000 teilen	Zählen in Schritten
Einspluseins	Einfache Plusaufgaben	Verdoppeln/Halbieren im Tausender	Verdoppeln/Halbieren im Millionenraum
Einsminuseins	Einfache Minusaufgaben	Einfache Plus- und Minusaufgaben	Einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben
Halbieren	Zerlegen	Mal 10/durch 10	Stelleneinmaleins
Zählen in Schritten/ Mini-Einmaleins	Einmaleins	Zehnereinmaleins auch umgekehrt	Einfache Multiplikations- und Divisionsaufgaben

Tab. 1

In jedem Zahlenraum werden 10 Basiskompetenzen geübt, die aus den Grundideen der Arithmetik (Abschnitt 5.1) abgeleitet sind. Man erkennt sieben thematische Stränge:

- Übungen zur Anzahlerfassung
- Übungen zur Erfassung der Zahlenreihe
- Übungen zur additiven und multiplikativen Zerlegung von Zahlen, besonders der Stufenzahlen
- Ergänzungen bis 10, 100, 1000 und in ganzen Tausendern bis zur Million
- Verdoppeln und Halbieren
- Einfache Plus- und Minusaufgaben
- Einfache Mal- und Divisionsaufgaben

Die Tabelle gibt auch einen ersten Eindruck von der Fortsetzung des Blitzrechnenkurses in den Tausender- und Millionenraum. Auch an ihr wird die fachlich aufbauende Konzeption des Handbuchs erneut deutlich.

Informationen zu dem Kurs und seiner praktischen Umsetzung sind den Abschnitten Z 4.1.1 und H 5.1.1 zu entnehmen. Sie werden in den Abschnitten T 4.1.1 und M 4.1.1 ergänzt.

7. „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser

Wie im Band 1 bieten wir den Leserinnen und Leser auch im Band 2 am Ende jedes Abschnitts Aufgaben an, die zur „Durchwanderung“ einer kleinen mathematischen Landschaft anregen. Die Aufgaben sind so gewählt, dass sie zu dem Thema des behandelten Abschnitts passen, in den Anforderungen aber etwas darüber hinausgehen. Es handelt sich immer um Aufgaben, bei deren Bearbeitung man Schritt für Schritt mathematische Einsichten gewinnen, zu Vermutungen gelangen und Teillösungen erzielen kann. Man darf nicht gleich

das Handtuch werfen, wenn es am Anfang nur langsam vorangeht. Das ist ein Fehler, der leider zu oft gemacht wird.

Die Beschäftigung mit den Aufgaben zum „Forschen und Finden“ trägt nicht nur zur eigenen professionellen Bildung bei, sondern liefert oft auch Stoff für die Förderung leistungsstarker Kinder, wie besonders die folgende Aufgabe zeigt.

„Einmaleins trifft Einspluseins“⁸

Wählen Sie zwei Zahlen aus dem Bereich 1 bis 11 (1 und 11 eingeschlossen), bilden Sie daraus eine Mal- und eine Plusaufgabe und subtrahieren Sie das Ergebnis der Plusaufgabe vom Ergebnis der Malaufgabe.

Beispiele:

Gewählte Zahlen 3, 5

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$3 + 5 = 8$$

$$15 - 8 = 7$$

Gewählte Zahlen 7, 6

$$7 \cdot 6 = 42$$

$$7 + 6 = 13$$

$$42 - 13 = 29$$

Gewählte Zahlen 8, 11

$$8 \cdot 11 = 88$$

$$8 + 11 = 19$$

$$88 - 19 = 69$$

a) Rechnen Sie eine Reihe weiterer Beispiele und kreisen Sie die Ergebnisse farbig in der Hundertertafel von Abb. 8 ein.

Anmerkung: Für zwei Ergebnisse muss man die Hundertertafel erweitern.

b) Vergleichen Sie das in Abb. 8 entstehende Schema der Kreise mit dem Schema der Kreise in Abb. 9.

Wie hängen die in Abb. 8 eingetragenen Ergebnisse der Aufgaben mit den Einmaleinszahlen in Abb. 9 zusammen?

Vielleicht müssen Sie noch weitere Aufgaben rechnen, um mehr Datenmaterial zur Verfügung zu haben.

Insgesamt gibt es $42 + 1 = 43$ mögliche Ergebnisse.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abb. 8

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
11	⑫	13	⑭	⑮	⑯	17	⑰	19	⑳
⑲	22	23	㉔	㉕	26	㉗	㉘	29	㉚
31	㉓	33	34	㉕	㉖	37	38	39	㉚
41	㉔	43	44	㉕	46	47	㉘	㉙	50
51	52	53	㉕	55	㉖	57	58	59	㉚
61	62	㉓	㉔	65	66	67	68	69	㉚
71	㉔	73	74	75	76	77	78	79	㉚
㉑	82	83	84	85	86	87	88	89	㉚
91	92	93	94	95	96	97	98	99	㉚

Abb. 9

⁸ Wir danken Carmen Rottkamp, Johannes-Helm-Grundschule/Schwabach, für eine gute Idee zur Formulierung der Aufgabe.

c) Vollziehen Sie einige der Rechnungen von a) an Punktfeldern nach.

Beispiele:

Gewählte Zahlen 8, 11 (Abb. 10)

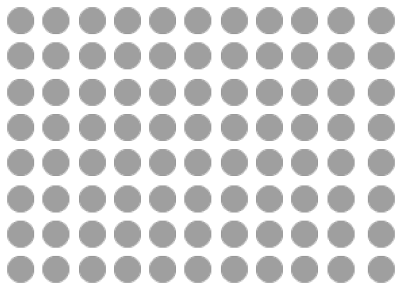


Abb. 10

Gewählte Zahlen 4, 9



Abb. 11

Wie können Sie die Summen $8 + 11$ und $4 + 9$ so von den Punktfeldern in Abb. 10 bzw. Abb. 11 subtrahieren, dass ein mathematisches Muster deutlich wird? Verifizieren Sie es an Abb. 8.

d) Gilt das Muster auch für größere Zahlen? Rechnen Sie einige Beispiele.

Zusatz:

f) Gilt das Muster auch für negative Zahlen?

Wenn Sie sich an das Rechnen mit negativen Zahlen nicht mehr erinnern: Wie müssten die Regeln für negative Zahlen lauten, damit das beobachtete Muster erhalten bleibt?